

高等学校数学系列教材

小波分析

樊启斌 编著



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社



■ 责任编辑：顾素萍

■ 责任校对：黄添生

■ 版式设计：詹锦玲

■ 封面设计：王荆强



ISBN 978-7-307-06584-0

定价：34.00元



高等学校数学系列教材

小波分析

■ 樊启斌　编著



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

小波分析/樊启斌编著.—武汉:武汉大学出版社,2008.10
高等学校数学系列教材
ISBN 978-7-307-06584-0

Ⅰ.小…　Ⅱ.樊…　Ⅲ.小波分析—高等学校—教材　Ⅳ.O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 158022 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:黄添生　　版式设计:詹锦玲

出版发行:武汉大学出版社　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn　网址:www.wdp.com.cn)
印刷:武汉中科兴业印务有限公司
开本:720×1000　1/16　印张:24.5　字数:438 千字　插页:1
版次:2008 年 10 月第 1 版　2008 年 10 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-06584-0/O·396　定价:34.00 元

前　言

本书是为应用数学、信息与计算科学、应用物理、信号与图像处理、计算机软件及其应用等专业的高年级本科生、硕士研究生学习“小波分析”而编写的，它源于编者多年来在武汉大学讲授小波分析时所使用的讲义，在这次正式出版之前再次进行了认真的修订.

本书系统地阐述了小波分析的基础理论及其典型应用，全书共九章，大体可分为四个部分：

(1) 预备知识. 第 1 章是全书所需要的预备知识，主要包括赋范线性空间、线性算子、Hilbert 空间、Riesz 基与标准正交基、正交投影算子、Fourier 变换、Fourier 级数、Gibbs 现象等基本概念，同时也不加证明地罗列了一些重要结论，并提供了丰富的例子. 熟悉泛函分析与 Fourier 分析的读者当然可以跳过这一章.

(2) 基本内容. 这部分包括第 2、3、4 章与第 6 章的第 1、2 节，系统阐述了小波分析基础、多分辨率分析、尺度函数与小波，以及紧支正交小波的基本概念、理论和方法，介绍了信号的多尺度逼近和小波变换的 Mallat 快速算法，给出了 Haar 小波、Marr 小波、线性样条小波、Shannon 小波、Franklin 小波、Meyer 小波、Battle-Lemarié 小波族、Daubechies 小波、Coiflet 小波等典型例子.

(3) 提高部分. 这部分包括第 5 章、第 6 章的第 3～5 节、第 7 章，主要论述几种要求比正交性条件更宽泛的小波，本书统称为非正交小波，包括二进小波、双正交小波、半正交小波、小波框架等；论述提升格式的频域表示与多相位结构、双正交小波的提升构造、整数小波变换、正交小波包、多重多分辨率分析与正交多小波、预处理与平衡多小波等.

(4) 典型应用. 第 8 章介绍了小波分析的几种主要应用，包括连续小波变换的应用举例，信号的奇异性检测、小波阈值去噪、Besov 空间小波图像去噪、嵌入式图像压缩编码等. 第 9 章是小波在科学计算中的应用，主要是以 BCR 快速算法为例介绍算子的稀疏逼近与偏微分方程的小波数值解法.

本书的主要特点可概括为“一个强调、二个适度、三种方法”.

(1) 小波分析是数学与应用数学领域近三十年来迅速发展的一个新分支，在理论和应用方面都取得了令人瞩目的成就. 因此，本书在阐述小波的基本概念、基本理论与基本方法时始终强调其数学思想与物理（或工程）背景，力图使读者不仅懂得如何做而且知道为什么这样做.

(2) 适度地阐述小波基本理论和适度地介绍小波典型应用是编写本书的另一个指导思想. 本书（第 2～7 章）只能说是覆盖了小波的基本理论，至于更多更深刻的理论当然尚有待于读者将来通过进一步学习与研究来掌握. 迄今，小波已广泛应用于数值分析、算子理论、信号处理、图像压缩、模式识别、量子物理、故障诊断等众多领域，本书（第 8、9 章）仅仅介绍了其中很少的几个方面，既很典型也很基本，不同学科背景的读者想必都能以此为切入点开展更深入的应用研究或者用于解决实际问题.

(3) 本书的另一个特点是重点突出了三种典型方法：① 时频转化. 小波分析是在 Fourier 分析的基础上发展起来的，函数或信号的许多时域上的性质转化为频域上的特征来研究则更容易或更本质化. ② 周期化方法. 把无穷区间上的积分处理成一个周期函数在有限区间例如 $[0,2\pi]$ 上的积分，使之容易与 Fourier 级数联系起来. 这种方法也体现了 Fourier 分析的特点. ③ 奇偶拆项法. 在讨论与小波滤波器有关的问题时往往使用这一方法. 可以说，只要掌握了这三种方法，就获得了打开小波理论之门的钥匙，就可以顺利地踏上愉快的小波之旅.

需要特别指出的是，本书中有些命题尤其是在频域上的等式，本应该是“几乎处处”成立的，考虑到非数学专业的读者一般不具备实分析知识，我们略去了“几乎处处”使之成为了恒等式. 从经验来看，这对从数学理论上严谨理解上述的相应结论基本不受什么影响. 恕不在正文中就此一一说明了.

本书是武汉大学“十一五”规划教材.

本书在编写过程中查阅和参考了国内外关于小波的大量书籍与期刊杂志及网上资料，在此谨向所有相关文献的专家学者一并表示衷心的感谢.

限于编者的水平，教材中错漏不当之处在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

2008 年 7 月 15 日于珞珈山麓

目　录

第一章　预备知识

本章是小波分析(Wavelet Analysis)的理论基础，主要罗列泛函分析与Fourier分析的有关基本概念、基本理论和基本方法，这些知识是学习本书后续各章节的基础知识.

1.1　赋范线性空间

赋范线性空间的理论尤其是Banach空间的理论，以及定义在这类空间上的线性算子理论，是泛函分析中最基本也是最完善的理论，为研究现代数学与物理中遇到的大量线性问题或非线性问题提供了有效的工具和方法.

1.1.1　赋范线性空间与Banach空间

定义1.1　设X是一个非空集合，K是复(或实)数域，在X的元素之间定义了加法运算和数乘运算，并且满足以下8条运算规律：$\forall x,y,z \in X$及$\forall \lambda,\mu \in K$，有

(a)　$x+y=y+x$;

(b)　$(x+y)+z=x+(y+z)$;

(c)　存在零元素θ，$x+\theta=x$;

(d)　存在x的负元素$-x$，$x+(-x)=\theta$;

(e)　$1\cdot x=x$;

(f)　$(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x)$;

(g)　$\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$;

(h)　$(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$,

则称集合X为**复(或实)线性空间**.

线性空间的元素又称为**向量**，因此线性空间又称为**向量空间**.

例1.1　所有$m\times n$实矩阵全体，按通常的矩阵加法和数乘运算构成一个实线性空间，记为$M_{m\times n}(\mathbf{R})$. 当$m=n$时，记为$M_n(\mathbf{R})$.

例 1.2 区间$[a,b]$上连续函数全体，按通常的函数加法和数乘运算构成一个实线性空间，记为$C[a,b]$.

设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是线性空间X中的元素，由$x_1,x_2,\cdots,x_n$的线性组合的全体构成的集合

$$\left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j \,\middle|\, \lambda_j \in K,\ j=1,2,\cdots,n\right\}$$

称为由$x_1,x_2,\cdots,x_n$ **生成的线性子空间**，记为$\mathrm{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

例如，三维向量空间$\mathbf{R}^3$中，令$\boldsymbol{i}=(1,0,0)$，$\boldsymbol{j}=(0,1,0)$，$\boldsymbol{k}=(0,0,1)$，则$\mathrm{span}\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$就是$\mathbf{R}^3$，而$\mathrm{span}\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$就是$xOy$平面上的向量全体.

设X,Y都是数域K上的线性空间，则

$$X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,\ y\in Y\}$$

也是数域K上的线性空间，称之为X与Y的**乘积空间**. 特别当$X=Y$时，

$$X\times X=X^2=\{(x,y)\mid x,y\in X\}.$$

如$\mathbf{R}=\mathbf{R}^1$为实数全体，而$\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$是二维实向量全体，$\mathbf{R}^n=\underbrace{\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}}_{n个}$是$n$维实向量全体.

定义 1.2 设X是一个线性空间，Y是一个复(或实)数集，f是从X到Y的一个映射，即$f: X\to Y$，则称f为一个**泛函**.

例 1.3 设X表示线性空间$C[a,b]$，在X中取定一个$y(t)$，定义映射

$$f(x(t))=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t,\quad \forall\, x(t)\in X, \tag{1.1}$$

则f就是由X到$\mathbf{R}$的一个泛函.

例 1.4 设X表示线性空间$M_n(\mathbf{R})$，定义映射

$$f(\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{A}),\quad \forall\,\boldsymbol{A}\in X, \tag{1.2}$$

其中$\det(\boldsymbol{A})$表示$\boldsymbol{A}$的行列式，则f是由X到实数域$\mathbf{R}$的一个泛函.

定义 1.3 设K是复(或实)数域，X是K上的一个线性空间，f是X上的一个泛函，记为$f(x)=\|x\|$，如果$\|\cdot\|$满足下列三个条件(称为范数公理)：$\forall\, x,y\in X$及$\forall\lambda\in K$，有

(1) $\|x\|\geqslant 0$，且$\|x\|=0$当且仅当$x=\theta$;

(2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$;

(3) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，

则称这个泛函$f=\|\cdot\|$为X上的一个**范数**. 定义了范数的线性空间称为**赋范线性空间**.

范数是数的绝对值概念的一种推广. 数的绝对值显然满足范数公理，所

以绝对值也可以看做一种范数.

例 1.5 对于 n 维实向量全体 $\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，定义范数

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=\Big(\sum_{j=1}^{n}x_j^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.3}$$

则 $\mathbf{R}^n$ 按这个范数 $\|\cdot\|_2$ 构成一个赋范线性空间.

例 1.6 在线性空间 $C[a,b]$ 中，定义范数

$$\|f\|_1=\int_a^b|f(t)|\,\mathrm{d}t,\quad \forall f(t)\in C[a,b], \tag{1.4}$$

则 $C[a,b]$ 按这个范数 $\|\cdot\|_1$ 构成一个赋范线性空间.

如果在 $C[a,b]$ 上定义另外一种范数

$$\|f\|_\infty=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)|,$$

那么 $C[a,b]$ 按这一范数 $\|\cdot\|_\infty$ 构成另外一个赋范线性空间.

例 1.7 考虑区间$[a,b]$上 p 方 Lebesgue 可积函数全体

$$\left\{f(t)\,\middle|\,\int_a^b|f(t)|^p\mathrm{d}t<+\infty\right\}, \tag{1.5}$$

把几乎处处相等的函数视为同一个函数，记为 $L^p[a,b]$，在其上定义范数

$$\|f\|_p=\Big(\int_a^b|f(t)|^p\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.6}$$

则 $L^p[a,b]$ 构成一个赋范线性空间.

在$(-\infty,+\infty)$上的 p 方 Lebesgue 可积函数全体记为 $L^p(\mathbf{R})$，在其上定义范数

$$\|f\|_p=\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^p\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.7}$$

则 $L^p(\mathbf{R})$ 构成一个赋范线性空间. 特别，当 $p=2$ 时，$L^2(\mathbf{R})$ 是小波分析中使用最多的一种赋范线性空间.

在不必区分 $L^p[a,b]$ 还是 $L^p(\mathbf{R})$ 时，就统一用 L^p 表示.

定理 1.1 赋范线性空间 L^p 中的三个重要不等式：

(1) **Hölder 不等式** 设 $p>1$，$q>1$，且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，$f(t)\in L^p$，$g(t)\in L^q$，则 $f(t)g(t)\in L^1$，且有

$$\|fg\|_1\leqslant\|f\|_p\|g\|_q. \tag{1.8}$$

(2) **Schwarz 不等式** 在 Hölder 不等式(1.8)中取 $p=q=2$，则有

$$\|fg\|_1\leqslant\|f\|_2\|g\|_2. \tag{1.9}$$

(3) **Minkowski 不等式** 设 $p\geqslant1$，$f(t),g(t)\in L^p$，则 $f(t)+g(t)\in$

L^p，且

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{1.10}$$

例 1.8 记 $\boldsymbol{x}=\{x_k\}$ 是一个数列，对于 $p\geqslant 1$，记

$$l^p = \left\{\boldsymbol{x} \,\middle|\, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty\right\}, \tag{1.11}$$

在 l^p 上定义范数

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in l^p, \tag{1.12}$$

则 l^p 构成一个赋范线性空间，称为 **p 方可和序列空间**. 在 l^p 空间中，也有 Hölder 不等式、Schwarz 不等式以及 Minkowski 不等式.

需要指出的是，尽管 $L^p[a,b]$,$L^p(\mathbf{R})$ 与 l^p 这 3 个空间中范数的定义 (1.6),(1.7) 及(1.12) 式是各不相同的，但我们采用了同一个记号 $\|\cdot\|_p$ 来表示这些范数，这在具体应用时根据上下文是完全能够分辨清楚的.

定义 1.4 设$\{x_n\}$ 是赋范线性空间 X 中的点列，如果存在一个 $x\in X$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$，则称**点列$\{x_n\}$ 依范数 $\|\cdot\|$ 收敛于** x.

今后如无特别说明，对于赋范线性空间中的收敛都是指依范数收敛.

定义 1.5 设$\{x_n\}$ 是赋范线性空间中的点列，如果 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，使当 $m,n>N$ 时，$\|x_m - x_n\| < \varepsilon$，则称$\{x_n\}$ 是一个**基本点列**，又称为 **Cauchy 点列**.

如果 X 中的每一个基本点列都收敛于 X 中的元素，则称 X 是**完备的**. 完备的赋范线性空间称为 **Banach 空间**.

例如，L^p 和 l^p 都是 Banach 空间.

又如，$C[a,b]$ 关于范数 $\|f\|_\infty = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)|$ 是 Banach 空间，但关于范数 $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ 不是 Banach 空间.

例 1.9 证明：$C[0,1]$ 关于范数 $\|\cdot\|_1$ 不是 Banach 空间.

证 考虑如下函数列：

$$f_n(t) = \begin{cases} 1, & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 1-2n\left(t-\dfrac{1}{2}\right), & \dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{2}, \\ 0, & \dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1, \end{cases}$$

显然，$f_n(t)$ 是区间$[0,1]$ 上的连续函数($n\geqslant 1$)，且

$$\|f_n - f_m\|_1^2 \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \to 0\,, \quad \text{当}\ m,n \to +\infty\ \text{时},$$

所以$\{f_n(t),\ n \geqslant 1\}$是$C[0,1]$中的一个 Cauchy 点列.

容易证明，$\forall t \in [0,1]$，函数列$f_n(t)$收敛于函数

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 0, & \dfrac{1}{2} < t \leqslant 1. \end{cases}$$

但$f(t) \notin C[0,1]$. 这就表明，$\{f_n(t),\ n \geqslant 1\}$在$C[0,1]$中不收敛，因此$C[0,1]$不是 Banach 空间.

我们知道，对于n维向量空间$\mathbf{R}^n$，存在n个线性无关的向量$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$，使得$\mathbf{R}^n$中的任一向量$\boldsymbol{x}$可以唯一地表示为这$n$个向量的线性组合，即这$n$个线性无关的向量构成$\mathbf{R}^n$的一个基，$\mathbf{R}^n$等于由这个基生成的子空间，即

$$\mathbf{R}^n = \mathrm{span}\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\},$$

$\mathbf{R}^n$中的基不是唯一的，其中任何n个线性无关的向量都可以作为基. 现在把基和线性无关的概念推广到无限维空间.

定义 1.6 设$E = \{\varphi_k,\ k \geqslant 1\}$是 Banach 空间$X$中的一个点列，如果$\forall x \in X$，存在唯一的数列$\{c_k\} \in l^2$，使得在依范数收敛的意义下

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \varphi_k, \tag{1.13}$$

则称E是X的一个 **Schauder 基**，其中c_k称为x关于这个 Schauder 基的**第k个坐标**. 进一步，若$\forall x \in X$，级数(1.13)无条件收敛(即与项的排列次序无关)，则称E是X的一个**无条件基**.

无限维的Banach空间不一定存在无条件基，即使存在无条件基$\{\varphi_k,\ k \in \mathbf{N}\}$，$\{\varphi_k\}$的生成子空间$\mathrm{span}\{\varphi_k,\ k \in \mathbf{N}\}$也不一定就是这个Banach空间. 这与有限维空间是很不相同的，因为在无限维空间中还涉及收敛点列的极限点.

一个集合S加上它的所有的极限点后得到的集合，称为S的**闭包**，记为$\overline{S}$. 点列$\{\varphi_k,\ k \in \mathbf{N}\}$的所有的线性组合构成的集合的闭包记为

$$\overline{\mathrm{span}}\{\varphi_k,\ k \in \mathbf{N}\}.$$

定义 1.7 设$E = \{\varphi_k,\ k \geqslant 1\}$是 Banach 空间$X$中的一个点列.

(1) 若E的任一有限子集是线性无关的，则称E是**线性无关的**.

(2) 若$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \varphi_k$收敛于 0 蕴含$c_k = 0$ ($\forall k \in \mathbf{N}$)，则称E是ω- **无关的**.

(3) 若 $\forall k\in\mathbf{N}$, $\varphi_k\notin\overline{\mathrm{span}}\{\varphi_n,\ n\in\mathbf{N},\ n\neq k\}$，则称 E 是**极小的**.

定理1.2 设 $E=\{\varphi_k,\ k\geqslant 1\}$ 是 Banach 空间 X 中的一个点列.

(1) 若 E 是 X 的 Schauder 基，则 E 是 X 中的极小点列，且

$$\overline{\mathrm{span}}\{\varphi_k,\ k\in\mathbf{N}\}=X.$$

(2) 若 E 是 X 中的极小点列，则 E 是 X 的一个 ω- 无关点列.

(3) 若 E 是 X 中的 ω- 无关点列，则 E 在 X 中是线性无关的.

1.1.2 线性算子与线性泛函

定义 1.8 设 X,Y 是实数或复数域 K 上的赋范线性空间，T: $X\to Y$ 是一个映射.

(1) 若 $\forall x_1,x_2\in X$ 及 $\forall\lambda_1,\lambda_2\in K$，有

$$T(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)=\lambda_1T(x_1)+\lambda_2T(x_2),$$

则称 T 是一个**线性算子**. 若 T 的值域 $\mathrm{Im}(T)\subseteq K$，则称 T 是 X 上的**线性泛函**.

(2) 若存在正数 M，使得

$$\|Tx\|\leqslant M\|x\|,\quad \forall x\in X,$$

则称 T 是**有界算子**. 若 T 又是线性算子，则称 T 是**有界线性算子**.

(3) 若 $\forall x_n,x\in X$，当 $x_n\to x$ 时，有 $Tx_n\to Tx$，则称 T 是**连续算子**.

(4) 若 T 的值域 $\mathrm{Im}(T)=Y$，且 T 是一一映射，则称 T 是**可逆算子**.

(5) 若对于 X 中的任一有界点列 $\{x_n\}$，点列 $\{Tx_n\}$ 包含一个收敛子点列，则称 T 是**紧算子或全连续算子**.

顺便指出，对于线性算子，只需 X,Y 是线性空间即可.

例 1.10 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^m$，矩阵 $\boldsymbol{A}\in M_{m\times n}(\mathbf{R})$，则线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是 $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 的一个线性算子.

例 1.11 设 $k\in\mathbf{Z}^+$，区间 $[a,b]$ 上具有 k 阶连续导数的实函数全体按通常的函数加法和数乘运算构成一个实线性空间，记为 $C^k[a,b]$. 定义映射

$$(\mathrm{D}f)(t)=\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=g(t),\quad \forall f(t)\in C^k[a,b],$$

则 $g(t)\in C^{k-1}[a,b]$，D是由 $C^k[a,b]$ 到 $C^{k-1}[a,b]$ 的一个线性算子. 我们把这一线性算子称为**微分算子**.

例 1.12 在赋范线性空间 $C[a,b]$ 上定义映射

$$(T_1x)(t)=\int_a^t x(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t\in[a,b],$$

$$T_2 x=\int_a^b x(t)\mathrm{d}t,\quad \forall x(t)\in C[a,b],$$

则 T_1, T_2 分别是 $C[a,b]$ 上的线性算子与线性泛函.

例 1.13 赋范线性空间 $C[a,b]$ 上的线性算子

$$(Tx)(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t,\quad \forall x(t)\in C[a,b]$$

称为 **Fredholm 算子**，或称为**积分算子**，其中 $K(s,t)$ 是闭区域$[a,b]\times[a,b]$上的二元连续函数，称为算子 T 的**核函数**.

下面证明积分算子 T 是由 $C[a,b]$ 到其自身的紧算子. 这只需证明，对于 $C[a,b]$ 中的任一有界点列$\{x_n\}$，$\{Tx_n\}$ 必有收敛的子点列. 事实上，由于存在 $M_1, M_2>0$，使得 $\|x_n\|\leqslant M_1$，$\forall n\in \mathbf{Z}^+$，以及 $\max\limits_{a\leqslant s,t\leqslant b}|K(s,t)|=M_2$，所以

$$\begin{aligned}\|Tx_n\| &= \max_{a\leqslant s\leqslant b}|(Tx_n)(s)|\leqslant \max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^b |K(s,t)x_n(t)|\mathrm{d}t\\ &\leqslant (b-a)M_1M_2,\quad \forall n\in \mathbf{Z}^+,\end{aligned}$$

即$\{Tx_n\}$是 $C[a,b]$ 中的有界点列. 另一方面，因为 $K(s,t)$ 是$[a,b]\times[a,b]$上的连续函数，所以 $\forall \varepsilon>0$，必有 $\delta>0$，使得当 $|s_1-s_2|<\delta$ 时，有

$$|K(s_1,t)-K(s_2,t)|<\frac{\varepsilon}{M_1(b-a)}.$$

于是有

$$|(Tx_n)(s_1)-(Tx_n)(s_2)|\leqslant M_1\int_a^b |K(s_1,t)-K(s_2,t)|\mathrm{d}t<\varepsilon.$$

这就是说，$\{Tx_n\}$ 是 $C[a,b]$ 中的等度连续的函数列. 根据 Arzela-Ascoli 定理，$\{Tx_n\}$ 必有收敛的子点列. 因此，T 是 $C[a,b]$ 上的紧算子.

定理 1.3 设 X,Y 是赋范线性空间，$T: X\to Y$ 是一个线性算子，则 T 连续的充分必要条件是 T 有界.

此外，任一紧算子必为有界算子，恒同算子是有界算子但不是紧算子.

定义 1.9 设 X,Y 是赋范线性空间，$T: X\to Y$ 是一个有界算子，称

$$\|T\|=\sup_{x\neq\theta}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

为**算子 T 的范数**.

对于有界线性算子 T，显然有

(1) $\|Tx\|\leqslant\|T\|\,\|x\|$，$\forall x\in X$；

(2) $\|T\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\|=\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|$.

例 1.14 考虑赋范线性空间 $L[a,b]$ 与 $C[a,b]$，其中的范数分别为

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)|\,\mathrm{d}t, \quad \forall x(t) \in L[a,b],$$

$$\|y\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |y(t)|, \quad \forall y(t) \in C[a,b],$$

定义算子 $T: L[a,b] \to C[a,b]$ 如下：

$$(Tx)(t) = \int_a^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad \forall x(t) \in L[a,b].$$

易知，T 是由 $L[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的有界线性算子. 下面计算 T 的范数.

任取 $x \in L[a,b]$，使得 $\|x\| = 1$，由于

$$\|Tx\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |(Tx)(t)| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} \left|\int_a^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right|$$

$$\leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b} \int_a^t |x(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \leqslant \int_a^b |x(\tau)|\,\mathrm{d}\tau = 1,$$

所以 $\|T\| \leqslant 1$. 另一方面，取 $x_0 = \frac{1}{b-a} \in L[a,b]$，显然有 $\|x_0\| = 1$，那么又有

$$\|T\| \geqslant \|Tx_0\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} \left|\int_a^t \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}\tau\right| = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}\tau = 1,$$

因此，算子 T 的范数 $\|T\| = 1$.

1.2 Hilbert 空间

欧氏空间的很多几何特征，如向量之间的夹角、正交等，在实际应用中都是十分重要的工具. 本节的主要任务就是把这些概念抽象推广到一般线性空间，建立起内积空间与 Hilbert 空间.

1.2.1 内积空间与 Hilbert 空间

定义 1.10 设 X 是复(或实)数域 K 上的线性空间，F 是乘积空间 $X \times X$ 上的一个泛函，记为 $F(x,y) = \langle x,y\rangle$，如果 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 满足下列条件：$\forall x,y \in X$ 及 $\forall \lambda_1,\lambda_2 \in K$，都有

(1) $\langle x,x\rangle \geqslant 0$，且 $\langle x,x\rangle = 0$ 当且仅当 $x = \theta$；

(2) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$，这里 $\overline{\langle y,x\rangle}$ 表示 $\langle y,x\rangle$ 的共轭复数；

(3) $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y\rangle = \lambda_1\langle x_1,y\rangle + \lambda_2\langle x_2,y\rangle$，

则称 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 X 中的**内积**. 定义了内积的线性空间称为**内积空间**.

例 1.15 在 n 维实向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中，定义内积为

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \tag{1.14}$$

则 $\mathbf{R}^n$ 就成为一个内积空间.

在 n 维复向量空间 $\mathbf{C}^n$ 中，定义内积

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}, \tag{1.15}$$

则 $\mathbf{C}^n$ 也成为一个内积空间.

例 1.16 在 $L^2(\mathbf{R})$ 中，定义内积为

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \overline{y(t)} \mathrm{d}t, \tag{1.16}$$

则 $L^2(\mathbf{R})$ 就成为一个内积空间.

例 1.17 在线性空间 l^2 中，定义内积为

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}, \quad \forall \boldsymbol{x} = \{x_k\}, \boldsymbol{y} = \{y_k\} \in l^2,$$

则 l^2 就成为一个内积空间.

定理 1.4 (Cauchy-Schwarz 不等式) 设 X 是一个内积空间，则

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}, \quad \forall x, y \in X,$$

其中，等号成立当且仅当 x 与 y 线性相关.

我们可以在内积空间中定义一个与内积有关的范数：

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle}. \tag{1.17}$$

容易验证，这样定义的 $\|\cdot\|$ 满足范数公理，所以内积空间按内积诱导出范数后又成为一个赋范线性空间.

定义 1.11 设 X 是一个内积空间，其内积为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$，如果 X 依导出范数 (1.17) 是完备的，则称 X 为 **Hilbert 空间.**

例如，L^2 和 l^2 都是 Hilbert 空间. 当然，不完备的内积空间也是存在的，如 $C[a,b]$ (参见例 1.9).

定义 1.12 设 H 是一个 Hilbert 空间，$\{\varphi_k, k \in \mathbf{Z}\}$ 是 H 中的一族元素，且 $H = \overline{\operatorname{span}}\{\varphi_k, k \in \mathbf{Z}\}$. 如果

(1) $\forall x \in H$，存在唯一的 $\boldsymbol{c} = \{c_k\} \in l^2$，使得

$$x = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \varphi_k;$$

(2) 存在常数 $A > 0$，$B > 0$，使 $\forall \boldsymbol{c} = \{c_k\} \in l^2$，都有

$$A\|\boldsymbol{c}\|_2 \leqslant \Big\|\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k\varphi_k\Big\| \leqslant B\|\boldsymbol{c}\|_2, \qquad (1.18)$$

则称$\{\varphi_k,\ k\in\mathbf{Z}\}$是$H$的一个**Riesz 基**. 而称(1.18)式为**Riesz 条件**.

在 Hilbert 空间中，Riesz 基是有界无条件基，反之亦然. 有时就把 Hilbert 空间中的无条件基称为 Riesz 基.

定理 1.5 设$g(t)\in L^2(\mathbf{R})$，$\hat{g}(\omega)$是$g(t)$的 Fourier 变换，V是$L^2(\mathbf{R})$的一个闭子空间，则下列命题相互等价：

(1) 函数系$\{g(t-k),\ k\in\mathbf{Z}\}$构成$V$的一个 Riesz 基.

(2) 存在常数$A>0$，$B>0$，使得$\forall\,\boldsymbol{c}=\{c_k\}\in l^2$，都有

$$A\|\boldsymbol{c}\|_2 \leqslant \Big\|\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k g(t-k)\Big\|_2 \leqslant B\|\boldsymbol{c}\|_2. \qquad (1.19)$$

(3) 存在常数$A>0$，$B>0$，使得

$$0<A\leqslant \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\hat{g}(\omega+2k\pi)|^2 \leqslant B<+\infty. \qquad (1.20)$$

(4) 函数系$\{g(t-k),\ k\in\mathbf{Z}\}$构成$V$的 Schauder 基，且存在常数$A>0$，$B>0$，使得$\forall\,f\in V$，有

$$A\|f\|_2^2 \leqslant \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\langle f(t),g(t-k)\rangle|^2 \leqslant B\|f\|_2^2. \qquad (1.21)$$

1.2.2 正交系与标准正交基

定义了内积后，就可以把n维欧氏空间中的一些几何概念推广到内积空间中去.

定义 1.13 设X是一个内积空间，$x,y\in X$，称$\sqrt{\langle x,x\rangle}$为元素$x$的**长度或范数**，记为$\|x\|$. 称

$$\arccos\frac{\langle x,y\rangle}{\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}}$$

为非零元素x,y之间的**夹角**. 如果$\langle x,y\rangle=0$，则称x与y**正交**.

设M是内积空间X的一个真子集，$x\in X$，但$x\notin M$. 如果$\forall\,y\in M$，都有$\langle x,y\rangle=0$，则称x与M**正交**，记为$x\perp M$.

又设M,N都是X的真子集，如果$\forall\,x\in M$及$\forall\,y\in \mathbf{N}$，都有$\langle x,y\rangle=0$，则称M与N**正交**，记为$M\perp N$.

设M是X的真子集，X中所有与M正交的元素的集合$\{x\in X|x\perp M\}$称为M在X中的**正交补**，记为$M^{\perp}$.

显然$M\perp M^{\perp}$，且$M\cap M^{\perp}=\{\theta\}$.

定义 1.14 设E是内积空间X的子集. 如果E中的元素都相互正交，则

称 E 是 X 的一个**正交系**；进一步，如果 E 中的元素还满足

$$\| x \| = 1, \quad \forall x \in E,$$

则称 E 是 X 的一个**标准正交系**.

设$\{\varphi_k, k \in \mathbf{Z}\}$是内积空间 X 的一个无条件基，同时$\{\varphi_k, k \in \mathbf{Z}\}$还是一个标准正交系，即$\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \delta_{jk}$，则称$\{\varphi_k, k \in \mathbf{Z}\}$是 X 的一个**标准正交基**，其中 δ_{jk} 称为 **Kronecker 符号**，其定义为

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \tag{1.22}$$

此时，对于 X 中的每一个元素 x，都可以唯一地表示为一个级数

$$x = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \varphi_k. \tag{1.23}$$

对这个级数两边与 φ_k 作内积，由于$\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \delta_{jk}$，所以 $c_k = \langle x, \varphi_k \rangle$，这就是 X 中的元素 x 在这个基下的“坐标”.

例 1.18 在 Hilbert 空间 l^2 中，令

$$\boldsymbol{e}_n = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n-1\text{个}}, 1, 0, \cdots) = (\delta_{kn})_{k \in \mathbf{N}}, \quad n \in \mathbf{N},$$

即 $\boldsymbol{e}_n$ 的第 n 个分量为 1，其他分量均为 0. 显然，$\{\boldsymbol{e}_n\}$ 是 l^2 的一个标准正交基.

与 n 维欧氏空间中的基比较，n 维欧氏空间中任何 n 个线性无关的向量都可以成为一组基，$\mathbf{R}^n$ 中的任一向量可以由这组基线性表示，且表示式唯一. Hilbert 空间中的 Riesz 基就相当于这样的基. 而 $\mathbf{R}^n$ 中特别有用的是标准正交基，$\mathbf{R}^n$ 中的任意一个基都与标准正交基等价，通过规范正交化方法，可以把任何一个基化为标准正交基. 在 Hilbert 空间中 Riesz 基也与标准正交基等价，一个 Riesz 基也可以通过规范正交化的方法化为标准正交基.

内积空间中的元素 x, y 正交的充分必要条件是“勾股定理”成立，即

$$\| x \|^2 + \| y \|^2 = \| x + y \|^2.$$

这一事实还可进一步推广到任意有限多个元素.

定理 1.6 设 H 是一个 Hilbert 空间，$E = \{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\}$ 是 H 中任意有限多个相互正交的元素组成的集合，则 $\forall c_1, c_2, \cdots, c_n \in K$，都有

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} | c_k |^2 \| \varphi_k \|^2.$$

定理 1.7 设 H 是一个 Hilbert 空间，$\{\varphi_k, k \in \mathbf{Z}\} \subset H$ 是一个标准正交系，则 $\forall x \in H$，有 **Bessel 不等式**：

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\langle x,\varphi_k\rangle|^2\leqslant\|x\|^2.$$

定义 1.15 设 H 是一个 Hilbert 空间，$E=\{\varphi_k,\ k\in\mathbf{Z}\}\subset H$ 是一个标准正交系. 如果 $\forall x\in H$，x 关于 E 的 Parseval 等式成立，即

$$\|x\|^2=\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\langle x,\varphi_k\rangle|^2,\tag{1.24}$$

则称 E 是**完备正交系**. 如果 $x\perp E$，必有 $x=\theta$，则称 E 是**完全正交系**.

定义 1.16 设 H 是一个 Hilbert 空间，$E=\{\varphi_k,\ k\in\mathbf{Z}\}\subset H$ 是一个标准正交系. 对于 $x\in H$，称级数 $\sum_{k\in\mathbf{Z}}\langle x,\varphi_k\rangle\varphi_k$（无论收敛与否）为 x 关于 E 的 **Fourier 级数**，而称 $\langle x,\varphi_k\rangle$ 为 x 关于 E 的 **Fourier 系数**. 如果

$$x=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\langle x,\varphi_k\rangle\varphi_k,\tag{1.25}$$

则称 x **关于** E **可以展开成 Fourier 级数.**

定理 1.8 设 H 是一个 Hilbert 空间，$E=\{\varphi_k,\ k\in\mathbf{Z}\}\subset H$ 是一个标准正交系，则下列命题相互等价：

(1) E 是 H 的标准正交基.

(2) $\overline{\operatorname{span}}\,E=H$.

(3) E 是完备正交系.

(4) E 是完全正交系.

(5) $\forall x,y\in H$，$\langle x,y\rangle=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\langle x,\varphi_k\rangle\overline{\langle y,\varphi_k\rangle}$.

(6) $\forall x\in H$，x 关于 E 具有 Fourier 展开式(1.25).

(7) 当 $H=L^2(\mathbf{R})$ 时，以上命题还等价于：$\forall f(t)\in C_c^0(\mathbf{R})$，有 $f(t)\in\overline{\operatorname{span}}\,E$.

这里，$C_c^0(\mathbf{R})$ 表示 $\mathbf{R}$ 上具有紧支集的连续函数全体，而函数 $f(t)$ 的支集是指集合 $\{t\in\mathbf{R}\,|\,f(t)\neq0\}$ 的闭包.

定理 1.9 设 H 是一个 Hilbert 空间，$E=\{\varphi_k,\ k\in\mathbf{Z}\}\subset H$ 是一个标准正交系. 如果存在 H 的一个稠密子集 D，使得 $\forall x\in D$ 都成立 Parseval 等式

$$\|x\|^2=\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\langle x,\varphi_k\rangle|^2,$$

那么 E 是完备正交系.

例 1.19 考虑定义在$(-\infty,+\infty)$上以 2π 为周期且在$[0,2\pi]$上平方可

积的函数全体构成的 Hilbert 空间 $L^2[0,2\pi]$，其内积定义为

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)y(t)\mathrm{d}t,\quad \forall\, x(t),y(t)\in L^2[0,2\pi],$$

则 $L^2[0,2\pi]$ 中的函数系

$$E=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\cos t,\sin t,\cdots,\cos nt,\sin nt,\cdots\right\}$$

是完备正交系，因而是 $L^2[0,2\pi]$ 的一个标准正交基.

证 首先由定义立即可知，E 是 $L^2[0,2\pi]$ 中的标准正交系.

其次，设 D 是 $L^2[0,2\pi]$ 中三角多项式全体构成的子集，易知 D 是 $L^2[0,2\pi]$ 的稠密子集. 另一方面，若任取 $x(t)\in D$，并设

$$x(t)=a_0\frac{1}{\sqrt{2}}+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

易知 $x(t)$ 关于 E 的 Fourier 系数中一部分为 a_0,a_n,b_n $(n=1,2,\cdots,N)$，而其余的均为 0，直接验证可知对 $x(t)$ 成立 Parseval 等式. 因此 E 是 $L^2[0,2\pi]$ 的完备正交系.

1.2.3 正交分解与正交投影算子

无限维的 Hilbert 空间与 n 维欧氏空间有很多类似之处，n 维欧氏空间中的很多性质可以推广到无限维的 Hilbert 空间上去.

定义 1.17 设 X,Y 都是内积空间，T 是 $X\to Y$ 的有界线性算子，而 T^* 是 $Y\to X$ 的有界线性算子，且满足

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle,\quad \forall\, x\in X,\ y\in Y,$$

则称 T^* 是 T 的**共轭算子**或**伴随算子**. 如果 T 是 Hilbert 空间 $H\to H$ 的有界线性算子，且满足 $T^*=T$，即

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,Ty\rangle,\quad \forall\, x,y\in H,$$

则称 T 是**自共轭算子**或**自伴算子**.

定理 1.10 设 G 是内积空间，H 是 Hilbert 空间，则对 $H\to G$ 的任一有界线性算子 T，都存在唯一的伴随算子 T^* $(G\to H)$.

例 1.20 考虑 $C[a,b]$ 上的 Fredholm 算子：

$$(Tx)(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t,\quad \forall\, x(t)\in C[a,b],$$

其中 $K(s,t)$ 是闭区域 $[a,b]\times[a,b]$ 上的二元连续函数. 现在我们来求 T 的伴随算子 T^*. 任取 $y(t)\in C[a,b]$，由于

$$\begin{aligned}\langle Tx,y\rangle &= \int_a^b\int_a^b K(s,t)x(t)\,\overline{y(s)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\\ &= \overline{\int_a^b\int_a^b \overline{K(s,t)x(t)}\,y(s)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s}\\ &= \int_a^b x(t)\,\overline{\int_a^b \overline{K(s,t)}\,y(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

所以，只要令

$$(T^*x)(s) = \int_a^b \overline{K(t,s)}x(t)\mathrm{d}t, \quad \forall\, x(t) \in C[a,b],$$

就有

$$\langle Tx,y\rangle = \langle x,T^*y\rangle, \quad \forall\, x,y \in C[a,b].$$

因此，T^* 是以$\overline{K(s,t)}$ 为核函数的 Fredholm 算子，并且当 $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$ 时，T 是自伴算子.

定理 1.11 设 M 是 Hilbert 空间 H 的一个闭子空间，则 $\forall\, x \in H$，必存在唯一的 $x_0 \in M$，$x_1 \in M^{\perp}$，使得 $x = x_0 + x_1$.

定义 1.18 设 M 是 Hilbert 空间 H 的一个闭子空间，$x \in H$. 若正交分解成立，即

$$x = x_0 + x_1, \quad 其中\ x_0 \in M,\ x_1 \in M^{\perp},$$

则称 x_0 是 x 在子空间 M 上的**正交投影**，记为 $Px = x_0$.

可以证明，P 是由 H 到 M 的一个线性算子，因此称之为**正交投影算子**. 有时为了表明 P 和 M 的关系，记 P 为 P_M.

定理 1.12 设 P 是 Hilbert 空间 H 上的一个有界线性算子，则下列命题相互等价：

(1) P 是正交投影算子.

(2) $P^2 = P$ 并且 P 是自伴算子.

(3) $P^2 = P$ 并且 $\mathrm{Ker}(P) \perp \mathrm{Im}(P)$.

(4) 当 H 是复空间时，以上命题还等价于：

$$\|Px\|^2 = \langle Px,x\rangle, \quad \forall\, x \in H.$$

定理 1.13 设 H 是一个内积空间，$\{\varphi_k,\ k \in \mathbf{Z}\} \subset H$ 是一个标准正交系，$E = \overline{\mathrm{span}}\{\varphi_k,\ k \in \mathbf{Z}\}$. $\forall\, x \in H$，如果 x 在 E 中有正交投影 x_0，那么

$$x_0 = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \langle x,\varphi_k\rangle\varphi_k.$$

如果 H 是 Hilbert 空间，那么 $\forall\, x \in H$，有

$$P_E x = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \langle x, \varphi_k\rangle \varphi_k.$$

设 X 是一个内积空间，我们可以把 X 分解为它的一些子空间的和：

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N, \quad X_j \subset X,\ j = 1,2,\cdots,N.$$

如果子空间之间还满足

$$X_j \cap X_k = \{\theta\}, \quad 当\ j \neq k\ 时,$$

则称 X 分解为子空间 $X_1, X_2, \cdots, X_N$ 的**直和**，记为

$$X = X_1 \dotplus X_2 \dotplus \cdots \dotplus X_N.$$

如果这些子空间之间还是两两正交的，即

$$X_j \perp X_k, \quad 当\ j \neq k\ 时,$$

则这样的和称为**正交和**，记为

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_N,$$

并称为 X 的一个**正交分解**.

把一个内积空间作正交分解，就相当于在这个空间中建立了一个“直角坐标系”，这样内积空间中的任何一个元素 x，都可以“投影”到这些子空间上去，x 就可以有“分量表示式”：

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_N,$$

其中 $x_j \in X_j$，$j = 1,2,\cdots,N$. 这就如同三维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 中的任一向量 $\boldsymbol{x}$ 可以投影到 Ox, Oy, Oz 三条坐标轴上，即

$$\boldsymbol{x} = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z).$$

如果 $\{x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \cdots, x_{k_j}^{(j)}\}$ 是子空间 X_j 的标准正交基，$j = 1,2,\cdots,N$，则把这些向量合并起来，即

$$\{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_{k_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_{k_2}^{(2)}, \cdots, x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, \cdots, x_{k_N}^{(N)}\}$$

就成为 X 的一个标准正交基.

1.3 Fourier 分析

Fourier 分析包括 Fourier 变换（积分）与 Fourier 级数这两个主要内容，是现代分析数学的重要分支之一，也是其他许多科学领域（特别是量子物理、振动力学以及信号分析与图像处理等）十分有效的工具. 数学中的很多重要的思想和理论都与 Fourier 分析的发展密切相关，小波分析就是在 Fourier 分析的基础上发展起来的一个数学分支.

1.3.1 Fourier 变换及其性质

定义 1.19 设 $f(t)\in L^1(\mathbf{R})$，则称

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{1.26}$$

为 $f(t)$ 的 **Fourier 变换**. 有时也记为 $F(f(t))$ 或 $(Ff)(\omega)$.

在信号分析中，对一个以时间为变量的函数 $f(t)$ 作 Fourier 变换，称之为求 $f(t)$ 的频谱. 因此，我们又称 $\hat{f}(\omega)$ 为 $f(t)$ 的频谱函数. 如果 $f(t)$ 表示时间(或空间)的函数，那么自变量 t 的变化范围往往称为时(或空)域；而其 Fourier 变换 $\hat{f}(\omega)$ 是频率的函数，自变量 ω 的变化范围往往称为频域.

例 1.21 求帐篷形函数

$$f(t)=\begin{cases}t, & 0\leqslant t<1,\\ 2-t, & 1\leqslant t<2,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

的 Fourier 变换 $\hat{f}(\omega)$.

解 根据 Fourier 变换定义，得

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t+\int_1^2(2-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\\&=\left(-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{\mathrm{i}\omega}+\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{(\mathrm{i}\omega)^2}\right)+\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{\mathrm{i}\omega}+\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{(\mathrm{i}\omega)^2}\right)\\&=\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{\mathrm{i}\omega}\right)^2.\end{aligned}$$

有些 Fourier 变换的计算是比较复杂的，需要借助微积分中的含参变量的积分与复分析中的 Cauchy 积分、留数定理等方法和技巧.

例 1.22 已知函数 $f(t)=c\,\mathrm{e}^{-\alpha t^2}$，其中 c,α 为常数，且 $\alpha>0$. 求 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}(\omega)$.

解 根据 Fourier 变换的定义，得

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t=c\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t^2-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

为了计算上式右端的积分，考虑函数

$$g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t^2+xt}\,\mathrm{d}t,\quad x\in\mathbf{R},$$

易知

$$g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha\left(t-\frac{x}{2\alpha}\right)^2+\frac{x^2}{4\alpha}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4\alpha}}.$$

若记 $h(x)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4\alpha}}$，则上式表明

$$g(x)=h(x),\quad \forall x\in\mathbf{R}.$$

显然，复变量函数 $g(z)$ 与 $h(z)$ 在整个复平面 $\mathbf{C}$ 内解析，故根据解析函数的唯一性，有

$$g(z)=h(z),\quad \forall z\in\mathbf{C}.$$

特别，取 $z=-\mathrm{i}\omega$，有 $g(-\mathrm{i}\omega)=h(-\mathrm{i}\omega)$，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t^2-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}},$$

所以 $\hat{f}(\omega)=c\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$.

定理 1.14 设 $f(t)\in L^1(\mathbf{R})$，$\hat{f}(\omega)$ 是 $f(t)$ 的 Fourier 变换，则

(1) $\hat{f}(\omega)$ 是$(-\infty,+\infty)$ 上的有界函数，更确切地说，有

$$|\hat{f}(\omega)|\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t;$$

(2) $\hat{f}(\omega)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上是一致连续的；

(3) $\lim\limits_{\omega\to\pm\infty}\hat{f}(\omega)=0$.

定理 1.15 设 $f(t)\in L^1(\mathbf{R})$，$\hat{f}(\omega)$ 是 $f(t)$ 的 Fourier 变换，且存在正整数 $N\in\mathbf{Z}^+$，使得

(1) $\hat{f}(\omega)\in C^N(\mathbf{R})$；

(2) $\hat{f}(\omega),\hat{f}^{(N)}(\omega)\in L^1(\mathbf{R})$；

(3) $\lim\limits_{\omega\to\pm\infty}\hat{f}^{(k)}(\omega)=0,\ \forall k\in\{0,1,2,\cdots,N\}$，

则 $\lim\limits_{t\to\pm\infty}t^Nf(t)=0$.

既然 Fourier 变换把一个时域上的信号 $f(t)$ 映射到频域上的信号 $\hat{f}(\omega)$，那么由频域上的信号 $\hat{f}(\omega)$ 能否恢复(或重构)时域信号 $f(t)$ 呢?

定义 1.20 设 $\hat{f}(\omega)\in L^1(\mathbf{R})$ 是函数 $f(t)\in L^1(\mathbf{R})$ 的 Fourier 变换，则称

$$F^{-1}(\hat{f}(\omega))=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

为 $\hat{f}(\omega)$ 的 **Fourier 逆变换**. 为了突出变量 t，有时也记为$(F^{-1}\hat{f})(t)$.

需要注意的是，$F^{-1}(\hat{f}(\omega))$ 不一定等于 $f(t)$. 只有当 $f(t)\in L^1(\mathbf{R})$，且 $\hat{f}(\omega)\in L^1(\mathbf{R})$ 时，在 $f(t)$ 的连续点上，才有 $f(t)=F^{-1}(\hat{f}(\omega))$，即

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega.\tag{1.27}$$

我们称上式为 Fourier 变换的**反演公式**.

我们知道，$L^2(\mathbf{R})$ 中的函数不一定属于 $L^1(\mathbf{R})$. 例如，$f(t)=\dfrac{\sin t}{t}\in L^2(\mathbf{R})$，但 $f(t)\notin L^1(\mathbf{R})$. 所以当 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 时，定义(1.26)式的积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$ 不一定有意义，故 $f(t)$ 的 Fourier 变换可能不存在. 下面我们给出 $L^2(\mathbf{R})$ 中的 Fourier 变换的定义.

设 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，对于正实数 r，定义 $f(t)$ 的截断函数为

$$c_r(t)=\begin{cases}f(t), & |t|\leqslant r,\\ 0, & |t|>r.\end{cases}\tag{1.28}$$

显然，$c_r(t)\in L^1(\mathbf{R})\cap L^2(\mathbf{R})$，且 $\hat{c_r}(\omega)$ 在 $L^1(\mathbf{R})$ 中有意义，即

$$\hat{c_r}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}c_r(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-r}^{r}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

有意义. 如果存在 $\hat{c}(\omega)\in L^2(\mathbf{R})$，使得

$$\lim_{r\to+\infty}\|\hat{c_r}-\hat{c}\|_2=0,\tag{1.29}$$

则称 $\hat{c}(\omega)$ 为 $f(t)$ 在 $L^2(\mathbf{R})$ 中的 **Fourier 变换**，也记为 $\hat{f}(\omega)$，即

$$\hat{f}(\omega)=\lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t.\tag{1.30}$$

这里的极限是(1.29)式所给出的 L^2 平均意义下的极限.

可以证明：$\hat{c_r}(\omega)$ 在 $L^2(\mathbf{R})$ 中的极限 $\hat{c}(\omega)$ 必定存在且唯一，所以 $L^2(\mathbf{R})$ 中函数的 Fourier 变换总是存在的，且由 $f(t)$ 唯一确定.

因此 $L^2(\mathbf{R})$ 中的 Fourier 变换是 $L^2(\mathbf{R})$ 到自身的一一映射. 若设这个映射为 T，则 $\forall f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，必存在唯一的 $g(t)\in L^2(\mathbf{R})$，使 $T(f)=g$. 换句话说，对于 $L^2(\mathbf{R})$ 中的任一函数的 Fourier 变换，都可以通过逆变换“恢复”到原像函数.

注意到在 $L^2(\mathbf{R})$ 中定义的内积(1.16)式，所以 Fourier 变换可以写成内积形式

$$\langle f(t),\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t.\tag{1.31}$$

Fourier 变换具有许多良好的性质，罗列如下：

(1) **线性性质** 设 $F(f(t))=\hat{f}(\omega)$，$F(g(t))=\hat{g}(\omega)$，则对任意常数 λ,μ，有

$$F(\lambda f(t)+\mu g(t))=\lambda\hat{f}(\omega)+\mu\hat{g}(\omega).$$

(2) **位移性质** 设 $F(f(t))=\hat{f}(\omega)$，则

$$F(f(t\pm b))=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}b\omega}\hat{f}(\omega);$$

$$F^{-1}(\hat{f}(\omega\pm\omega_0))=\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\omega_0 t}f(t).$$

(3) **伸缩性质** 设 $F(f(t))=\hat{f}(\omega)$，常数 $a>0$，则

$$F(f(at))=\frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right),$$

这就是说，对于 $a>1$，当信号 $f(t)$ 被横向压缩为 $f(at)$ 时，$\hat{f}(\omega)$ 却被拉伸为 $\frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$；当 $0<a<1$ 时，信号被横向拉伸了，而 $\hat{f}(\omega)$ 却被压缩了.

(4) **微分性质** 设 $F(f(t))=\hat{f}(\omega)$，n 为自然数，则

$$F(f^{(n)}(t))=(\mathrm{i}\omega)^n\hat{f}(\omega);$$

$$F^{-1}(\hat{f}^{(n)}(\omega))=(-\mathrm{i}t)^n f(t).$$

(5) **卷积性质** 设 $F(f(t))=\hat{f}(\omega)$，$F(g(t))=\hat{g}(\omega)$，则

$$F((f*g)(t))=\hat{f}(\omega)\cdot\hat{g}(\omega);$$

$$F(f(t)\cdot g(t))=(\hat{f}*\hat{g})(\omega),$$

其中 $(f*g)(t)$ 表示函数 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的卷积，即

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

(6) **对称性质** 设 $F(f(t))=\hat{f}(\omega)$，则

$$F(f(-t))=\hat{f}(-\omega),$$

即信号反向后的 Fourier 变换等于先对该信号作 Fourier 变换再反向.

(7) **乘积定理** $\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\langle\hat{f},\hat{g}\rangle$，且 $\langle\hat{f},g\rangle=\langle f,\hat{g}\rangle$.

(8) **Parseval 等式** $\|f\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_2^2$.

(9) $F(F(f(t)))=F(\hat{f}(\omega))=2\pi f(-t)$.

(10) 若 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有 k 阶连续导数，则当 $\omega\to\infty$ 时，

$$\hat{f}(\omega)=O\left(\frac{1}{|\omega|^k}\right),$$

即 $f(t)$ 越光滑，则当 $\omega\to\infty$ 时，$\hat{f}(\omega)$ 趋向于零的速度越快.

Fourier 变换在数学、物理以及无线电等众多领域都具有广泛的应用，下面列举部分例子说明，如求广义积分的值、求微分方程的解、求积分方程的解等.

例 1.23 证明：Dirichlet 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$.

证 考虑函数

$$f(t)=\begin{cases}1, & -1\leqslant t\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

的 Fourier 变换，因为

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=2\,\frac{\sin\omega}{\omega},$$

所以

$$F(\hat{f}(t))=2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=4\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t\,\cos\omega t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

根据 Fourier 变换的性质(9) 以及 $f(t)$ 的对称性，得

$$F(\hat{f}(t))=2\pi f(-\omega)=2\pi f(\omega),$$

因此，有

$$2\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t\,\cos\omega t}{t}\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\pi, & -1\leqslant\omega\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

特别，取 $\omega=0$，即得所证.

例 1.24 设 $f(t)$ 的 Fourier 变换为 $F(f(t))=\hat{f}(\omega)$，证明：

(1) $F(f(t)\cos\omega_0 t)=\dfrac{1}{2}\big(\hat{f}(\omega+\omega_0)+\hat{f}(\omega-\omega_0)\big)$；

(2) $F(f(t)\sin\omega_0 t)=\dfrac{1}{2}\big(\hat{f}(\omega+\omega_0)-\hat{f}(\omega-\omega_0)\big)$.

证 (1) 利用 Euler 公式，有

$$f(t)\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}\big(f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}+f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\big).$$

根据 Fourier 变换的线性性质与位移性质，即得

$$\begin{aligned}F(f(t)\cos\omega_0 t)&=\frac{1}{2}\big(F(f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t})+F(f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t})\big)\\&=\frac{1}{2}\big(\hat{f}(\omega+\omega_0)+\hat{f}(\omega-\omega_0)\big).\end{aligned}$$

(2) 利用 Euler 公式，有

$$f(t)\sin\omega_0 t=\frac{1}{2}\big(f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}-f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\big).$$

以下同(1) 的证明.

例 1.25 求函数 $f(t)=c\,\mathrm{e}^{-\alpha t^2}$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}(\omega)$，其中 c,α 为常数，且 $\alpha>0$.（参见例 1.22）

解 因为 $f'(t)=-2c\alpha t\,\mathrm{e}^{-\alpha t^2}$，所以有

$$f'(t)+2\alpha t f(t)=0.$$

对上式两边作 Fourier 变换，并利用 Fourier 变换的性质，得

$$\mathrm{i}\omega\hat{f}(\omega)+\mathrm{i}\,2\alpha\hat{f}'(\omega)=0,$$

即

$$\hat{f}'(\omega)+\frac{1}{2\alpha}\omega\hat{f}(\omega)=0.$$

这是一个以 $\hat{f}(\omega)$ 为未知函数的常微分方程，利用分离变量法即可解得

$$\hat{f}(\omega)=C\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}.$$

利用 Gauss 积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}$，得

$$C=\hat{f}(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=c\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t^2}\mathrm{d}t=c\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

因此 $\hat{f}(\omega)=c\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$.

例 1.26 求函数 $f_1(t)=\mathrm{e}^{-|t|}$ 与 $f_2(t)=\frac{1}{1+t^2}$ 的 Fourier 变换，并利用所得结果证明：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)[1+(\lambda-t)^2]}=\frac{2\pi}{4+\lambda^2},\quad \forall\lambda\in\mathbf{R}.$$

解 (1) $f_1(t)=\mathrm{e}^{-|t|}$ 的 Fourier 变换为

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{1-\mathrm{i}\omega}\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{1+\mathrm{i}\omega}\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}\omega)t}\Big|_{0}^{+\infty}\\&=\frac{2}{1+\omega^2}.\end{aligned}$$

由此，得 $f_1(t)=\mathrm{e}^{-|t|}$ 的 Fourier 逆变换为

$$\mathrm{e}^{-|t|}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}_1(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega,$$

即

$$\pi\mathrm{e}^{-|t|}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{1+\omega^2}\mathrm{d}\omega.$$

于是，$f_2(t)=\frac{1}{1+t^2}$ 的 Fourier 变换为

$$\hat{f}_2(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{1+t^2}\mathrm{d}t=\pi\mathrm{e}^{-|\omega|}.$$

(2) $\forall\lambda\in\mathbf{R}$，由于 $f_2(t)$ 与其自身的卷积为

$$(f_2*f_2)(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)[1+(\lambda-t)^2]},$$

以及 Fourier 变换的卷积性质

$$(\widehat{f_2 * f_2})(\omega) = (\hat{f}_2(\omega))^2 = \pi^2 e^{-2|\omega|},$$

所以

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)[1+(\lambda-t)^2]} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (\widehat{f_2 * f_2})(\omega) e^{i\omega\lambda} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \pi^2 e^{-2|\omega|} e^{i\omega\lambda} d\omega \\
&= \frac{\pi}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\omega|} e^{-i\omega\left(-\frac{\lambda}{2}\right)} d\omega \\
&= \frac{\pi}{4} \frac{2}{1+\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} = \frac{2\pi}{4+\lambda^2}.
\end{aligned}$$

例 1.27 求解积分方程

$$f(t) = e^{-|t|} + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-s|} f(s) ds,$$

其中$|\lambda| < \frac{1}{2}$.

解 对方程两边进行 Fourier 变换，并利用 Fourier 变换的卷积性质，得

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2} + \lambda \frac{2}{1+\omega^2}\hat{f}(\omega),$$

即

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2}{1-2\lambda+\omega^2}.$$

再进行 Fourier 逆变换，并注意到例 1.26 (1) 的结果，所以

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{1-2\lambda+\omega^2} d\omega = \frac{e^{-\sqrt{1-2\lambda}|t|}}{\sqrt{1-2\lambda}}.$$

1.3.2 Fourier 级数

为叙述方便起见，我们用 $L^2[0,2\pi]$ 表示定义在$(-\infty,+\infty)$ 上以 2π 为周期且在$[0,2\pi]$ 上平方可积的函数的全体，则 $L^2[0,2\pi]$ 是一个 Hilbert 空间，其中的内积定义为

$$\langle f(t), g(t)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, \overline{g(t)} dt.$$

定理 1.16 函数系$\{e^{ikt}, k \in \mathbf{Z}\}$ 是 $L^2[0,2\pi]$ 的一个标准正交基，即 $\forall f(t) \in L^2[0,2\pi]$，有

$$f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt},\tag{1.32}$$

其中

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t,\quad \forall\, k\in\mathbf{Z}.\tag{1.33}$$

我们称(1.32)式右端的级数为 $f(t)$ 的 Fourier 级数，而称 c_k 为$f(t)$ 的 Fourier 系数.

例 1.28 设 $f(t)\in L^2[0,2\pi]$，且满足

$$f(t)+f(\pi+t)=0,\quad \forall\, t\in\mathbf{R},$$

则存在一个 $\mu(t)\in L^2[0,2\pi]$，使得 $f(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mu(2t)$.

证 依题设及定理 1.16，有

$$f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt},$$

其中 c_k 由(1.33)式给出. 由于

$$\begin{aligned}c_k&=\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t+\int_{\pi}^{2\pi}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t\right)\\&=\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}f(\pi+t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\pi+t)}\mathrm{d}t\right)\\&=\frac{1-(-1)^k}{2\pi}\int_0^{\pi}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

所以 $c_{2k}=0$，$\forall\, k\in\mathbf{Z}$. 故

$$f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{2k+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+1)t}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mu(2t),$$

其中 $\mu(2t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{2k+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2kt}$. 显然，$\mu(t)\in L^2[0,2\pi]$.

定理 1.17 设 $f(t)\in L^2[0,2\pi]$ 在$[0,2\pi]$上连续且分段光滑，则它的 Fourier 级数一致收敛于 $f(t)$.

定理 1.18 设 $f(t)$ 是以 2π 为周期且在区间$[-\pi,\pi]$上的有界变差函数，又 $f(t)$ 在(a,b)内连续，则 $f(t)$ 的 Fourier 级数在(a,b)内的任一闭子区间上一致收敛于 $f(t)$.

定理 1.19 设 $f(t)\in L^2[0,2\pi]$，则 $f(t)$ 与其 Fourier 系数 c_k 满足 Parseval 等式

$$\|f\|^2=\sum_{k\in\mathbf{Z}}|c_k|^2.\tag{1.34}$$

在工程应用中，各种信号都可看做时间的函数. 由于基函数

$$e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$$

是一个"正弦波"，而且 k 越大，频率就越高，所以(1.32)式的物理意义就是：任意一个 2π 周期函数(信号)都可以分解成各种频率的正弦波之和. 另外，一个信号 $f(t)$ 的范数 $\|f\|$ 常常解释为它的能量. 如果信号 $f(t) \in L^2[0,2\pi]$，则这个信号是 2π 周期且能量有限的. 因此Parseval等式(1.34)表明：一个信号的能量等于它所包含的所有不同频率成分的能量之和.

定义 1.21 设 $\boldsymbol{c} = \{c_k, k \in \mathbf{Z}\}$ 是一个数列. 如果级数

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{-ik\omega} \tag{1.35}$$

收敛，则称之为 $\{c_k\}$ 的**序列 Fourier 变换**，记为 $(F\boldsymbol{c})(\omega)$ 或 $\hat{\boldsymbol{c}}(\omega)$，即

$$(F\boldsymbol{c})(\omega) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{-ik\omega}. \tag{1.36}$$

称积分

$$F^{-1}(\hat{\boldsymbol{c}}(\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{\boldsymbol{c}}(\omega) e^{ik\omega} d\omega, \quad k \in \mathbf{Z} \tag{1.37}$$

为 $\hat{\boldsymbol{c}}(\omega)$ 的**序列 Fourier 逆变换**.

显然，如果 $\boldsymbol{c} = \{c_k\} \in l^1$，那么级数(1.35)收敛，因而 $(F\boldsymbol{c})(\omega)$ 或 $\hat{\boldsymbol{c}}(\omega)$ 有意义；如果 $\boldsymbol{c} = \{c_k\} \in l^2$，那么 $(F\boldsymbol{c})(\omega) \in L^2[0,2\pi]$.

若令 $z = e^{-ik\omega}$，则级数(1.35)为定义在单位圆 $|z| = 1$ 上的Laurent级数

$$S(z) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k z^k, \tag{1.38}$$

称之为序列 $\{c_k\}$ 的 **z 变换或符号**. 当 $\{c_k\}$ 是一个有限序列时，也称 $S(z)$ 为一个 **Laurent 多项式**.

数列 $\boldsymbol{c} = \{c_k\}$ 可以看做信号 $f(t)$ 的离散值，从这个意义上讲，有时就把 l^1 或 l^2 中的元素 $\{c_k\}$ 称为信号. 所以序列Fourier变换在数值计算、信号处理和小波分析中十分有用.

例 1.29 设 $\boldsymbol{c} = \{c_k\}$ 是一个有限序列，$\hat{\boldsymbol{c}}(\omega)$ 是 $\{c_k\}$ 的序列 Fourier 变换，且 $|\hat{\boldsymbol{c}}(\omega)| = 1$，证明：必存在常数 a 及某个 $k_0 \in \mathbf{Z}$，使得

$$c_k = a\delta_{k,k_0},$$

其中 δ_{jk} 为 Kronecker 符号.

证 因为 $|\hat{\boldsymbol{c}}(\omega)|^2 = 1$，所以 $\forall n \in \mathbf{Z}$，有

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k \overline{c_{k+n}} = \delta_{n0}. \tag{1.39}$$

由于 $\{c_k\}$ 是有限序列，故可选取 $k_1, k_2 (k_1 \leqslant k_2)$ 使得 $c_{k_1} \neq 0$，$c_{k_2} \neq 0$，且当 $k < k_1$ 或 $k > k_2$ 时，有 $c_k = 0$. 令 $n = k_2 - k_1$，则由(1.39)式得

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k\,\overline{c_{k+k_2-k_1}} = \delta_{k_2-k_1,0}.$$

再由 k_1,k_2 的特征可知，上式左边只有一项是非零项，即 $c_{k_1}\,\overline{c_{k_2}} \neq 0$，所以 $k_1 = k_2$. 令 $k_0 = k_1$，$a = c_{k_1}$，则 $c_k = a\delta_{k,k_0}$.

1.3.3 Gibbs 现象

为方便起见，记 $f(t)$ 的 Fourier 级数(1.32) 式为 $S(f,t)$，即

$$S(f,t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{ikt}, \tag{1.40}$$

其中系数 c_k 由(1.33) 式确定.

设 $f(t) \in L^2[0,2\pi]$ 是$[0,2\pi]$ 上的连续且分段光滑的函数，根据定理 1.17，$S(f,t)$ 一致收敛于 $f(t)$. 如果周期函数 $f(t)$ 有跳跃间断点 t_0，那么 $S(f,t)$ 在任意包含 t_0 的小区间上不可能一致收敛. 这是因为 $S(f,t)$ 的前 n 项部分和 $S_n(t)$ 总是连续的，而连续函数列一致收敛的极限也是连续的. Josiah W. Gibbs 于 1899 年最先研究了这种不一致收敛导致在间断点 t_0 附近出现的现象. 因此，人们就把这一特别现象称为 **Gibbs 现象**. 看下面的例子：设函数

$$h(t) = \begin{cases} -1, & -\pi < t < 0, \\ 0, & t = 0, \\ 1, & 0 < t < \pi, \end{cases} \tag{1.41}$$

容易知道，$h(t)$ 的 Fourier 级数为

$$S(h,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}. \tag{1.42}$$

根据 Jordan 判别法知道，其部分和 $S_n(t)$ 收敛到 $h(t)$.

现在我们来研究(1.42) 式的部分和

$$S_n(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}$$

在 $h(t)$ 的间断点 $t = 0$ 附近的性质.

通过逐项微分有

$$\begin{aligned} S_n'(t) &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\cos(2k+1)t = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin 2(k+1)t - \sin 2kt}{2\sin t} \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{\sin 2(n+1)t}{\sin t}, \quad t \neq 0, \end{aligned}$$

所以，有

$$S_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^t \frac{\sin 2(n+1)u}{\sin u}\,du. \tag{1.43}$$

进一步可以判定，$\tau_k^{(n)} = \dfrac{k\pi}{2(n+1)}$ 是 $S_n(t)$ 的极值点，$k=1,2,\cdots,n$，且当 k 为奇数时 $\tau_k^{(n)}$ 是极大值点，当 k 为偶数时 $\tau_k^{(n)}$ 是极小值点(如图 1-1). $S_n(t)$ 的极大值从左向右减小，而极小值从左向右增大. 这就是说，第一个极大值 $S_n(\tau_1^{(n)})$ 也是最大值. 因为

$$S_n(\tau_1^{(n)}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2(n+1)}} \frac{\sin 2(n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \frac{\dfrac{t}{2(n+1)}}{\sin\dfrac{t}{2(n+1)}}\,\mathrm{d}t,$$

且对于 $t \in (0,\pi)$，有

$$\frac{\dfrac{t}{2(n+1)}}{\sin\dfrac{t}{2(n+1)}} \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{t}{2(n+1)}}{\sin\dfrac{t}{2(n+1)}} = 1,$$

所以由 Lebesgue 控制收敛定理，知

$$\lim_{n\to\infty} S_n(\tau_1^{(n)}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = 1.178\,979\,7\cdots. \tag{1.44}$$

更细致地说，$S_n(\tau_1^{(n)})$ 是单调下降趋于该极限值的.

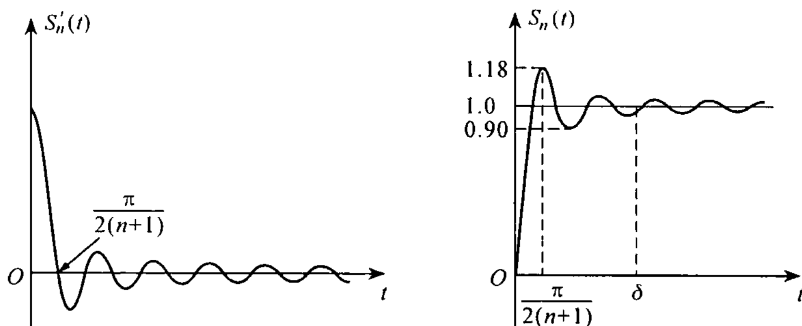


图 1-1　部分和在间断点附近的 Gibbs 现象

现在来说明 $S_n(t)$ 收敛于 $h(t)$ 的特性. 对于充分小的 $\delta > 0$，显然 $S_n(t)$ 在 $\left[\delta, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上一致收敛于 $h(t)$，但在 $[0,\delta]$ 上其收敛是不一致的. 事实上，不论 n 多么大，都有一个点 $\tau_1^{(n)} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$，使得 $S_n(t)$ 在该点达到一个峰值，其值大约为 1.178 98，比 $h(0+0)=1$ 的值大约超出 18%，即

$$\lim_{n\to\infty} S_n(\tau_1^{(n)}) \approx 1.179 = h(0+0) + 0.18h(0+0).$$

当 $n\to\infty$ 时，达到峰值的点 $\tau_1^{(n)}$ 趋近于零点.

这种现象就是 Gibbs 现象. 若用部分和 $S_n(t)$ 近似代替 $h(t)$ 时，随着项数 n 增大虽然均方误差可以减小，但在间断点 $t=0$ 附近 $S_n(t)$ 的峰值与 $h(t)$ 的差值不能减小，而是趋近于跳跃度的 18%.

对于一般情形，可以给出如下定义：

定义 1.22 设函数列 $\{f_n(t)\}$ 在区间 $(t_0, t_0+\delta)$ 内收敛于函数 $f(t)$，$\delta > 0$，并且 $f(t_0+0)$ 存在. 若

$$\overline{\lim_{\substack{n\to\infty\\ t\to t_0^+}}} f_n(t) > f(t_0+0) \quad (\text{或} \underline{\lim_{\substack{n\to\infty\\ t\to t_0^+}}} f_n(t) < f(t_0+0)),$$

则称 $\{f_n(t)\}$ 在点 t_0 的右半邻域有**局部的 Gibbs 现象**. 对于左半邻域有类似的定义.

例 1.30 设周期函数 $f(t)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上是有界变差函数，$t_0 \in [-\pi, \pi]$ 是 $f(t)$ 的一个跳跃间断点，且存在 $\delta > 0$，使得 $f(t)$ 在 $(t_0-\delta, t_0)$ 及 $(t_0, t_0+\delta)$ 内连续，则 $f(t)$ 的 Fourier 级数的部分和序列 $\{S_n(f,t)\}$ 在 t_0 的邻域有局部的 Gibbs 现象.

证 不妨设 $f(t_0) = \frac{1}{2}\big(f(t_0+0) + f(t_0-0)\big)$，并且令

$$J = f(t_0+0) - f(t_0-0),$$

则 $J \neq 0$. 考虑函数

$$g(t) = f(t) - \frac{J}{2} h(t-t_0),$$

其中 $h(t)$ 是由(1.41) 式给出的函数. 容易验证，$g(t)$ 在点 t_0 连续因而在 $(t_0-\delta, t_0+\delta)$ 内连续，并且在 $[-\pi, \pi]$ 上是有界变差函数. 根据定理 1.18 知，$S_n(g,t)$ 在 $(t_0-\delta, t_0+\delta)$ 内的任一闭区间上一致收敛. 注意到

$$S_n(g,t) = S_n(f,t) - \frac{J}{2} S_n(h, t-t_0),$$

于是由 $\{S_n(h, t-t_0)\}$ 在 t_0 的邻域有局部的 Gibbs 现象即可推知 $\{S_n(f,t)\}$ 在 t_0 的邻域有局部的 Gibbs 现象.

习 题 1

1. 证明：三角多项式全体构成 $L^2[0, 2\pi]$ 的一个稠密子集.

2. 设 $C^k[a,b]$ 表示在区间 $[a,b]$ 上具有 k 阶连续导数的实函数全体构成的线性空间 $(k \geqslant 1)$. 对于 $x(t) \in C^k[a,b]$，规定

$$\|x\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b}\{|x(t)|, |x'(t)|, \cdots, |x^{(k)}(t)|\},$$

证明：$C^k[a,b]$ 是赋范线性空间.

3. 设 T: $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是由赋范线性空间 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的有界线性算子，其中 $\boldsymbol{A}=(a_{jk})$ 是 $m\times n$ 实矩阵，$\mathbf{R}^n$ 上的范数定义为

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j|,$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$. 证明：算子 T 的范数

$$\|T\| = \max_{1\leqslant j\leqslant m}\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}|.$$

4. 设 H 是 Hilbert 空间，证明：

$$\|x\| = \sup_{\|y\|=1}|\langle x,y\rangle|, \quad \forall x\in H.$$

5. 设 H 是 Hilbert 空间，$y,z\in H$ 为已知，定义

$$Tx = \langle x,y\rangle z, \quad \forall x\in H.$$

证明：T 是 H 上的一个紧算子.

6. 设 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，且 $\alpha>0$，定义 $L^2(\mathbf{R})$ 上的算子 T 如下：

$$(Tf)(x)=\sqrt{\alpha}f(\alpha x+\beta), \quad \forall f(x)\in L^2(\mathbf{R}),$$

证明：T 是一个酉算子，即 $\forall f,g\in L^2(\mathbf{R})$，有 $\langle Tf,Tg\rangle=\langle f,g\rangle$.

7. 设 T: $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是 $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 的有界线性算子，其中 $\boldsymbol{A}=(a_{jk})$ 是 2×2 实矩阵，求 T 的伴随算子，并给出 T 为自伴算子的条件.

8. 称 Hilbert 空间 H 中的一个点列 $\{\varphi_k, k\in\mathbf{Z}\}$ 是稳定的，如果满足 Riesz 条件(1.18) 式. 证明：若 $\{\varphi_k, k\in\mathbf{Z}\}$ 是 H 中的任一稳定点列，则

$$V=\left\{\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k\varphi_k \,\middle|\, \sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k^2<+\infty\right\}$$

是 H 的一个闭线性子空间.

9. 设 $\{u_k, k\in\mathbf{Z}\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的一个标准正交系，令

$$v_k=\alpha u_k+\beta u_{k+1}.$$

求 α,β 应满足的充分必要条件，使得 $\{v_k, k\in\mathbf{Z}\}$ 是 H 中的一个稳定点列.

10. 设 X 和 Y 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间，证明：若 $X\perp Y$，则 $X+Y$ 也是 H 的闭子空间.

11. 考虑 Legendre 多项式：

$$L_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$L_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{\mathrm{d}^n(t^2-1)^n}{\mathrm{d}t^n}, \quad n=1,2,\cdots.$$

证明：Legendre 多项式点列$\{L_0, L_1, \cdots, L_n, \cdots\}$是 Hilbert 空间 $L^2[-1,1]$ 的标准正交基.

12. 考虑 Hilbert 空间 $L^2[0,1]$ 的子空间 $W = \mathrm{span}\{1, x, x^2, x^3\}$.

(1) 利用 Gram-Schmidt 正交化方法，求 W 的一个标准正交基.

(2) 求函数 $\cos x$ 在子空间 W 上的投影.

13. 设$\{u_k, k\in \mathbf{Z}\}$是 Hilbert 空间 H 中的一个标准正交系，$X=\{x_k\}$，$Y=\{y_k\}\in l^2$，令 $\alpha=\sum_{k\in\mathbf{Z}} x_k u_k$，$\beta=\sum_{k\in\mathbf{Z}} y_k u_k$. 证明：若 $X\perp Y$，则 $\alpha\perp\beta$. 请说明其逆命题是否成立.

14. 设 $f(t)$ 在$(-\infty, +\infty)$上连续，且存在常数 $C,\varepsilon>0$，使得

$$|f(t)|\leqslant \frac{C}{(1+|t|)^{1+\varepsilon}},\quad t\in\mathbf{R},$$

$$|\hat{f}(\omega)|\leqslant \frac{C}{(1+|\omega|)^{1+\varepsilon}},\quad \omega\in\mathbf{R},$$

证明 Poisson 求和公式：

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} f(t+2k\pi)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\hat{f}(k)\mathrm{e}^{ikt}.$$

15. 求 $f(t)\in L^1(\mathbf{R})$，使其 Fourier 变换 $\hat{f}(\omega)=\dfrac{1}{(1+\omega^2)^2}$.

16. 设 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\leqslant 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 求 $f(t)$ 的 Fourier 变换，并由此证明：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\mathrm{d}t=\pi.$$

17. 求 Shannon 函数 $S(t)=\dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$ 的 Fourier 变换.

18. 证明：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{|\omega|^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}|\omega|}}{2\sqrt{\lambda}}$，其中 $\lambda>0$，$\omega\in\mathbf{R}$.

19. 设 $f(t)=\begin{cases}1-t^2, & |t|\leqslant 1,\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$ 求 $f(t)$ 的 Fourier 变换，并由此证明：

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=-\frac{3}{16}\pi.$$

20. 利用 Fourier 变换求解微分方程：$y''(x)-y(x)=\mathrm{e}^{-|x|}$.

21. 求 $f(t)\in L^1(\mathbf{R})$，使之满足积分方程

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-y)\mathrm{e}^{-|y|}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}},\quad \forall t\in\mathbf{R}.$$

22. 证明：若对于正常数 C 及 ε，$f(t)$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}(\omega)$ 满足

$$|\hat{f}(\omega)| \leqslant \frac{C}{(1+|\omega|)^{N+\varepsilon}},$$

其中 $N \in \mathbf{Z}^+$ (非负整数集)，则 $f(t)$ 是 $N-1$ 次可微且有界的函数.

23. 利用 Fourier 变换证明：弦振动方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (-\infty < x < +\infty,\ t > 0), \\ u(x,0) = \varphi(x), & \\ u_t'(x,0) = \psi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

的解由 D'alembert 公式给出：

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

24. 利用 Fourier 变换求解热传导方程的 Cauchy 问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) & (-\infty < x < +\infty,\ t \geqslant 0), \\ u(x,0) = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty). \end{cases}$$

25. 设 S 是无穷维 Hilbert 空间 H 的一个子集(不一定可数)，$d>0$，已知 S 中任意两点间的距离都等于 d. 证明：H 中必存在一点 y，使得

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{d}(x-y) \,\middle|\, x \in S \right\}$$

构成 H 中的一个标准正交系.

26. 利用 Fourier 变换证明 Wirtinger 不等式：若函数 $f(t) \in C^1[a,b]$，且 $f(a) = f(b) = 0$，则

$$\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2 \mathrm{d}t,$$

其中的常数 $\frac{(b-a)^2}{\pi^2}$ 不能再改进.

第二章　小波分析基础

本章介绍小波分析的基本概念，主要包括小波及其几何特征、连续小波变换与离散小波变换、信号的联合时频分析、正交小波基及其频域特性、小波的 Hölder 正则性等内容.

2.1　小波的概念

我们知道，函数系$\{e^{ikt}, k\in \mathbf{Z}\}$构成 Hilbert 空间 $L^2[0,2\pi]$ 的一个标准正交基，使得 $L^2[0,2\pi]$ 中的任一函数都能展开成 Fourier 级数(1.32)，从而给分析问题带来了方便. 此外，基函数 e^{ikt} 都是由同一个简单函数 $w(t)=e^{it}$ 的整数“膨胀”形成的，即

$$e^{ikt}=w(kt),\quad k\in \mathbf{Z}.$$

因此，可以认为 $L^2[0,2\pi]$ 就是由单个函数 $w(t)$ 生成的空间. 但是，$L^2(\mathbf{R})$ 中的函数就不能写成 Fourier 级数(1.32)，这是由于 $L^2(\mathbf{R})$ 与 $L^2[0,2\pi]$ 是完全不同的两个函数空间，函数 $w(t)=e^{it}$ 显然不属于 $L^2(\mathbf{R})$. 事实上，如果存在这样一个类似于正弦波 $w(t)$ 的能够生成 $L^2(\mathbf{R})$ 的“波”函数 $\psi(t)$，那么 $\psi(t)$ 在 $\pm\infty$ 一般应“衰减”到零，也就是说 $\psi(t)$ 是一个小的波. 现在的问题是，这样的“小波”是否一定存在? 具有什么样的特征? 是否可以具体构造出来? 对于 $L^2(\mathbf{R})$ 中的任意函数 $f(t)$，如何用这个“小波”将 $f(t)$ 表示成类似于 Fourier 展开式(1.32) 的级数形式? 本章我们将初步阐述这些问题.

定义 2.1　设 $\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})$，且其 Fourier 变换 $\hat{\psi}(\omega)$ 满足可允许性 (admissibility) 条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\,d\omega<+\infty, \tag{2.1}$$

则称 $\psi(t)$ 为一**基本小波**或**小波母函数**. 有些文献也称**允许小波**.

例 2.1　Haar 小波(如图 2-1 所示)　设

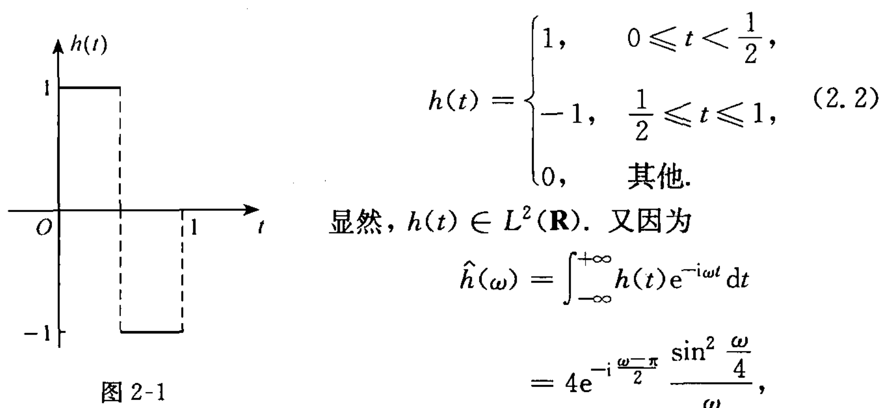


图 2-1

$$h(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<\dfrac{1}{2},\\ -1, & \dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \tag{2.2}$$

显然，$h(t)\in L^2(\mathbf{R})$. 又因为

$$\hat{h}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega-\pi}{2}}\frac{\sin^2\frac{\omega}{4}}{\omega},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{h}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega=16\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^4\frac{\omega}{4}}{|\omega|^3}\mathrm{d}\omega<+\infty,$$

可见，函数 $h(t)$ 满足可允许性条件(2.1)，所以是一个基本小波. 这是 A. Haar 于1910年最先给出的，是小波分析理论中一个非常简单并且具有代表性的小波例子.

例 2.2 Marr 小波 设 $g(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$，令

$$\psi(t)=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1-t^2)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{2.3}$$

易知 $\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})$. 由第一章例 1.22 知 $\hat{g}(\omega)=\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}}$. 根据 Fourier 变换的微分性质，有

$$\hat{\psi}(\omega)=-(\mathrm{i}\omega)^2\hat{g}(\omega)=\omega^2\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega=2\int_{0}^{+\infty}\omega^3\mathrm{e}^{-\omega^2}\mathrm{d}\omega=1<+\infty,$$

可允许性条件(2.1) 成立，所以函数 $\psi(t)$ 是一个基本小波.

Marr 小波 $\psi(t)$ 的图形如图 2-2 所示，因其形状像墨西哥帽子的截面，所

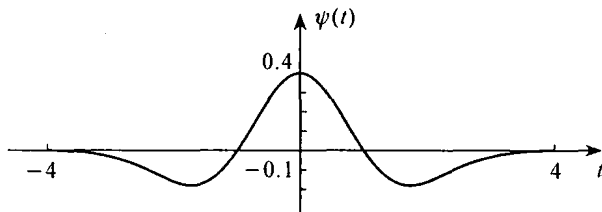


图 2-2

以又被称为"墨西哥帽子"小波.

利用卷积运算，可以提高一个小波母函数的光滑性. 我们自然希望这个经"磨光"后的函数仍是小波母函数. 下面的定理肯定了这一点.

定理 2.1 设 $\psi(t)$ 是一个小波母函数，$\xi(t) \in L(\mathbf{R})$ 是有界函数，则卷积 $\psi * \xi(t)$ 也是一个小波母函数.

证 因为 $\xi(t) \in L(\mathbf{R})$，所以 $\hat{\xi}(\omega)$ 有界. 根据定理 1.4，有

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi * \xi(t)|^2 \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t-u)\xi(u)\mathrm{d}u \right|^2 \mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t-u)| \, |\xi(u)| \mathrm{d}u \right)^2 \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t-u)| \, |\xi(u)|^{\frac{1}{2}} |\xi(u)|^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}u \right)^2 \mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t-u)|^2 |\xi(u)| \mathrm{d}u \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi(u)| \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t-u)|^2 \mathrm{d}t \, |\xi(u)| \right) \mathrm{d}u \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi(u)| \mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 \mathrm{d}t \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi(u)| \mathrm{d}u \right)^2 \\
&< +\infty,
\end{aligned}
$$

所以 $\psi * \xi(t) \in L^2(\mathbf{R})$. 又

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi * \xi}(\omega)|^2}{|\omega|} \mathrm{d}\omega &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2 |\hat{\xi}(\omega)|^2}{|\omega|} \mathrm{d}\omega \\
&\leqslant \sup |\hat{\xi}(\omega)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} \mathrm{d}\omega \\
&< +\infty,
\end{aligned}
$$

所以，$\psi * \xi(t)$ 满足可允许性条件(2.1)，因而是小波母函数. ∎

例 2.3 线性样条小波 设

$$\psi(t) = h * \xi(t),$$

其中

$$\xi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

而 $h(t)$ 是 Haar 小波(2.2). 易知

$$\psi(t)=\begin{cases} t, & 0\leqslant t<\frac{1}{2}, \\ 1-t, & \frac{1}{2}\leqslant t<\frac{3}{2}, \\ t-2, & \frac{3}{2}\leqslant t<2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{2.4}$$

显然 $\xi(t)$ 满足定理 2.1 的条件，故 $\psi(t)$ 是小波母函数. 因为 $\psi(t)$ 是逐段线性的连续函数(图 2-3)，故称之为**线性样条小波**.

我们看到，就光滑性而言，$\psi(t)$ 比 Haar 小波有了很大的改善.

若取光滑性好一些的"磨光"子，例如 $\xi(t)=\mathrm{e}^{-t^2}$，则 $\psi(t)=h*\xi(t)$ 也是小波母函数(图 2-4). 当然，这里的 $\psi(t)$ 是数值解.

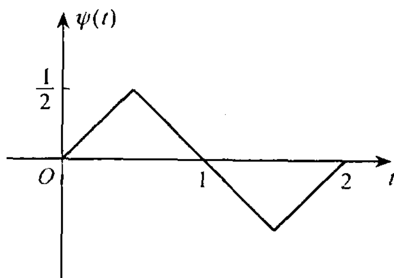


图 2-3

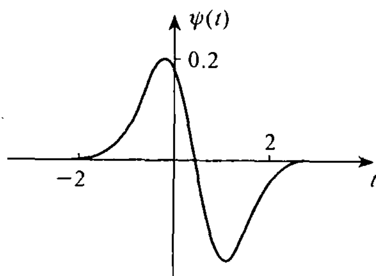


图 2-4

现在，我们来研究可允许性条件(2.1)的更直观意义. 为此，我们补充假设 $\psi(t)\in L(\mathbf{R})$，即 $\psi(t)$ 在实轴上绝对可积，则$\hat{\psi}(\omega)$ 是连续有界函数. 于是由(2.1)式推知 $\hat{\psi}(0)=0$，这等价于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\,\mathrm{d}t=0. \tag{2.5}$$

可见 $\psi(t)$ 具有波动性. 又因为 $\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})$，一般说来具有衰减性，所以 $\psi(t)$ 应满足

$$|\psi(t)|\leqslant\frac{C}{(1+|t|)^{1+\varepsilon}}\quad(\varepsilon>0). \tag{2.6}$$

于是，我们有如下结论.

定理 2.2 若 $\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})\cap L(\mathbf{R})$，且(2.5)与(2.6)同时成立，则 $\psi(t)$ 满足可允许性条件(2.1)，因而是小波母函数.

证 因为 $\hat{\psi}(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\,\mathrm{d}t=0$，所以

$$\begin{aligned}|\hat{\psi}(\omega)| &= |\hat{\psi}(\omega)-\hat{\psi}(0)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}-1)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{C|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}-1|}{(1+|t|)^{1+\varepsilon}}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{C|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}-1|}{|\omega|\left(1+\left|\frac{u}{\omega}\right|\right)^{1+\varepsilon}}\mathrm{d}u \\ &= \left(\int_{-\infty}^{-1}+\int_{-1}^{0}+\int_{0}^{1}+\int_{1}^{+\infty}\right)\frac{C|\omega|^{\varepsilon}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}-1|}{(|\omega|+|u|)^{1+\varepsilon}}\mathrm{d}u \\ &\triangleq I_1+I_2+I_3+I_4.\end{aligned}$$

由于

$$I_3 = |\omega|^{\varepsilon}C\int_0^1\frac{|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}-1|}{(|\omega|+|u|)^{1+\varepsilon}}\mathrm{d}u \leqslant |\omega|^{\varepsilon}C\int_0^1\frac{u}{u^{1+\varepsilon}}\mathrm{d}u = O(|\omega|^{\varepsilon}),$$

$$I_4 \leqslant |\omega|^{\varepsilon}C\int_1^{+\infty}\frac{2}{(|\omega|+|u|)^{1+\varepsilon}}\mathrm{d}u \leqslant |\omega|^{\varepsilon}C\int_1^{+\infty}\frac{2}{u^{1+\varepsilon}}\mathrm{d}u = O(|\omega|^{\varepsilon}),$$

同理可知：$I_1 = O(|\omega|^{\varepsilon})$，$I_2 = O(|\omega|^{\varepsilon})$，所以

$$\hat{\psi}(\omega) = O(|\omega|^{\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0.$$

因而$\int_{-1}^{1}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega < +\infty$. 而

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{-1}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega + \int_{1}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{\psi}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(t)|^2\mathrm{d}t < +\infty,\end{aligned}$$

所以$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega < +\infty$. ∎

由此可见，我们有理由认为：可允许性条件(2.1) 基本上等价于条件(2.5) 和(2.6). 因此，小波母函数 $\psi(t)$ 一定是振荡型的(正负部分互相抵消)并且在有限区间外恒等于 0 或很快地趋于 0 的函数. 这正是“小波”这一名称的由来.

2.2 连续小波变换

定义 2.2 设 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$，$\psi(t)$ 为一基本小波，令

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \tag{2.7}$$

其中 $a,b \in \mathbf{R}$，$a \neq 0$，则称函数 $\psi_{ab}(t)$ 为由小波母函数 $\psi(t)$ 生成的依赖于参

数 a,b 的**连续小波**，而称

$$W_f(a,b)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}\mathrm{d}t \tag{2.8}$$

为 $f(t)$ 的**连续小波变换**.

根据 Schwarz 不等式，$W_f(a,b)$ 是一个有界函数，且

$$|W_f(a,b)|=|\langle f,\psi_{ab}\rangle|\leqslant\|f\|_2\|\psi\|_2.$$

我们知道，对于 Fourier 变换，有：

(1) 反演公式：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'}\,\mathrm{d}t';$$

(2) 乘积定理：$\langle f,g\rangle=\dfrac{1}{2\pi}\langle\hat{f},\hat{g}\rangle$；

(3) Parseval 恒等式：$\|f\|_2^2=\dfrac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_2^2$.

小波变换也有反演公式、乘积定理及 Parseval 恒等式.

定理2.3 设 $f(t),g(t)\in L^2(\mathbf{R})$，$\psi(t)$ 为一基本小波，令

$$C_\psi=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega,$$

则在 f 的连续点有反演公式

$$f(t)=\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}W_f(a,b)\psi_{ab}(t)\,\frac{1}{a^2}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b. \tag{2.9}$$

类似的乘积定理及 Parseval 等式为

$$\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}W_f(a,b)\,\overline{W_g(a,b)}\,\frac{1}{a^2}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b=\langle f,g\rangle, \tag{2.10}$$

$$\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|W_f(a,b)|^2\,\frac{1}{a^2}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b=\|f\|_2^2. \tag{2.11}$$

证 先证(2.10)式. 因为

$$W_f(a,b)=\langle f,\psi_{ab}\rangle=\frac{1}{2\pi}\langle\hat{f},\hat{\psi}_{ab}\rangle$$

$$=\frac{\sqrt{|a|}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega b}\,\overline{\hat{\psi}(a\omega)}\,\mathrm{d}\omega,$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}W_f(a,b)\,\overline{W_g(a,b)}\,\frac{1}{a^2}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{|a|}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega b}\,\overline{\hat{\psi}(a\omega)}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\hat{g}(\omega')}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' b}\hat{\psi}(a\omega')\mathrm{d}\omega'\right\}\frac{\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b}{a^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\hat{\psi}(a\omega)}\,\frac{\mathrm{d}a}{|a|}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega b}\,\mathrm{d}b$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' b}\hat{\psi}(a\omega')\,\overline{\hat{g}(\omega')}\,\mathrm{d}\omega'$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\hat{\psi}(a\omega)}\big(\hat{\psi}(a\omega)\,\overline{\hat{g}(\omega)}\big)\,\frac{\mathrm{d}a}{|a|}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\,\overline{\hat{g}(\omega)}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{\psi}(a\omega)|^2\,\frac{1}{|a|}\,\mathrm{d}a$$

$$= \frac{1}{2\pi}C_\psi\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\,\overline{\hat{g}(\omega)}\,\mathrm{d}\omega$$

$$= C_\psi\Big(\frac{1}{2\pi}\langle\hat{f},\hat{g}\rangle\Big)$$

$$= C_\psi\langle f,g\rangle.$$

此即(2.10)式. 在(2.10)式中，取 $g(t) = f(t)$，即得(2.11)式.

利用(2.10)式，$W_g(a,b) = \langle g,\psi_{ab}\rangle$ 以及酉空间内积的对称性，对任一 $g(t) \in L^2(\mathbf{R})$，都有

$$C_\psi\langle f,g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}W_f(a,b)\,\overline{\langle g,\psi_{ab}\rangle}\,\frac{1}{a^2}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}W_f(a,b)\langle\psi_{ab},g\rangle\,\frac{1}{a^2}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b$$

$$= \langle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}W_f(a,b)\psi_{ab}\,\frac{1}{a^2}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b,g\rangle.$$

故

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}W_f(a,b)\psi_{ab}(t)\,\frac{1}{a^2}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b.$$

此即(2.9)式. ∎

2.3 窗口与 Heisenberg 不确定性原理

定义 2.3 设函数 $g(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义，我们称使得 $g(t) \neq 0$ 的点所构成的集合的闭包为 $g(t)$ 的**支集**，记为 $\operatorname{supp} g$，即

$$\operatorname{supp} g = \overline{\{t \in \mathbf{R} \mid g(t) \neq 0\}}.$$

具有紧支集的函数就是在有限区间外恒等于零的函数，用这样的函数(或在有限区间外很快地趋于零的函数) $g(t)$ 与 $f(t)$ 相乘的结果，可以形象化地称之为开了一扇“窗口”，而称 $g(t)$ 为“窗口函数”(图 2-5).

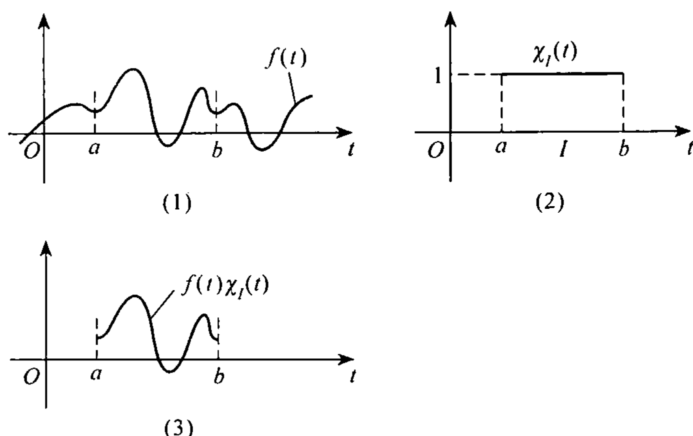


图 2-5

为了对窗口的位置与大小给出一个定量的描述，下面将引进窗口的中心与宽度等概念. 我们先回忆概率论中随机变量的分布问题. 设 ξ 为连续型随机变量，其密度函数为 $f(t)$，满足 $f(t) \geqslant 0$，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$，则 ξ 的数学期望与方差分别为

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t, \quad D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E\xi)^2 f(t)\mathrm{d}t,$$

其中的积分要求绝对收敛. 考虑到 $E\xi$ 与 $\sqrt{D\xi}$ 分别刻画了分布曲线的位置与大小(即函数的局部性). 受此启发，我们给出如下定义.

定义 2.4 设 $g(t)$ 及 $tg(t) \in L^2(\mathbf{R})$，则称 $g(t)$ 是一个**窗口函数**，称

$$t_g^* = \frac{1}{\|g\|_2^2}\int_{-\infty}^{+\infty} t\,|g(t)|^2\mathrm{d}t \tag{2.12}$$

为窗口函数 $g(t)$ **的中心**(简称为**窗口中心**)，称

$$\Delta_g = \frac{1}{\|g\|_2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_g^*)^2\,|g(t)|^2\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.13}$$

为窗口函数 $g(t)$ **的宽度**(简称为**窗口宽度**)，而称

$$\Delta_g \Delta_{\hat{g}}$$

为窗口函数 $g(t)$ 的**窗口面积**(简称为**窗口面积**)，其中 $\hat{g}(\omega)$ 为 $g(t)$ 的 Fourier 变换.

现假设小波母函数 $\psi(t)$ 及其 Fourier 变换 $\hat{\psi}(\omega)$ 都是窗口函数，则不难求得相应的连续小波 $\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ 的窗口中心为

$$t^*_{\psi_{ab}} = at^*_\psi + b.$$

特别，当 $t^*_\psi = 0$ 时，有 $t^*_{\psi_{ab}} = b$. $\psi_{ab}(t)$ 的窗口宽度为

$$\Delta_{\psi_{ab}} = |a| \Delta_\psi.$$

因为 $\hat{\psi}_{ab}(\omega) = \sqrt{|a|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b\omega}\hat{\psi}(a\omega)$，所以

$$t^*_{\hat{\psi}_{ab}} = \frac{1}{a}t^*_{\hat{\psi}}, \quad \Delta_{\hat{\psi}_{ab}} = \frac{1}{|a|}\Delta_{\hat{\psi}}, \quad \Delta_{\psi_{ab}}\Delta_{\hat{\psi}_{ab}} = \Delta_\psi\Delta_{\hat{\psi}}.$$

于是，我们有结论(图 2-6)：

(1) **连续小波 $\psi_{ab}(t)$ 的 Fourier 变换(频谱)$\hat{\psi}_{ab}(\omega)$ 的窗口中心 $t^*_{\hat{\psi}_{ab}}$ 随 a ($a > 0$) 之减小而增大(即窗口移向高频部分)，但其窗口宽度亦同时加宽.**

(2) **连续小波 $\psi_{ab}(t)$ 的窗口面积不随参数 a,b 而变.**

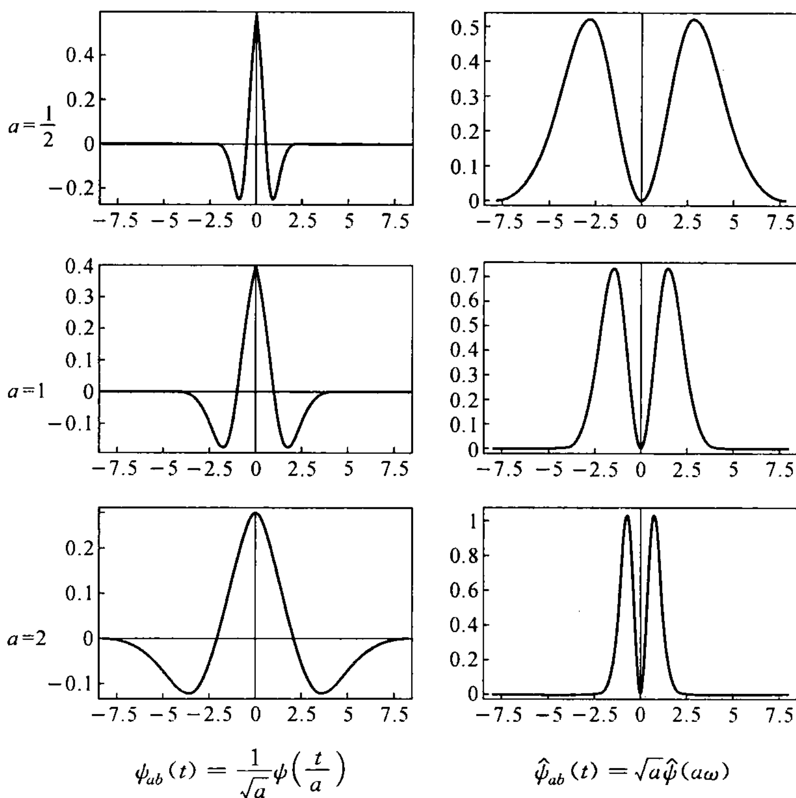


图 2-6

为了使小波变换在时间域和频率域均有较好的局部性，我们当然希望 $\psi(t)$ 与 $\hat{\psi}(\omega)$ 的窗口宽度都小一些，亦即 $\psi(t)$ 的窗口面积尽可能小一些，但这是有矛盾的. 因为 Heisenberg 不确定性原理告诉我们 Δ_ψ 与 $\Delta_{\hat{\psi}}$ 的大小是相

互制约的.

定理 2.4（Heisenberg 不确定性原理） 设 $g(t)$ 及其 Fourier 变换 $\hat{g}(\omega)$ 都是窗口函数，则

$$\Delta_g \Delta_{\hat{g}} \geqslant \frac{1}{2},$$

这里，等号成立当且仅当

$$g(t) = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}at} \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} \mathrm{e}^{-\frac{(t-b)^2}{4\alpha}}$$

（其中 $\alpha > 0$，$a, b \in \mathbf{R}$，$c \neq 0$）.

证 因为只要作简单的代换

$$g_1(t) = g(t - t_g^*)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_{\hat{g}}^* t},$$

即可将一般情形化为 $t_{g_1}^* = t_{\hat{g}_1}^* = 0$ 的特殊情形，故只需对 $t_g^* = t_{\hat{g}}^* = 0$ 的情形证明即可.

利用 Cauchy-Schwarz 不等式（定理 1.4），对任何可导函数 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 有

$$\left| \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) \overline{f'(t)} \, \mathrm{d}t \right|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|^2 \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|^2 \mathrm{d}t,$$

所以

$$\begin{aligned}
(\Delta_g \Delta_{\hat{g}})^2 &= \frac{1}{\|g\|_2^2 \|\hat{g}\|_2^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |g(t)|^2 \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi \|g\|_2^4} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |g(t)|^2 \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}'(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{\|g\|_2^4} \int_{-\infty}^{+\infty} |tg(t)|^2 \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} |g'(t)|^2 \mathrm{d}t \\
&\geqslant \frac{1}{\|g\|_2^4} \left| \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} t g(t) \overline{g'(t)} \, \mathrm{d}t \right|^2 \\
&= \frac{1}{\|g\|_2^4} \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |g(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^2 \\
&= \frac{1}{\|g\|_2^4} \left(\frac{1}{2} t |g(t)|^2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^2 \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\|g\|_2^4} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^2 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

这就证得 $\Delta_g \Delta_{\hat{g}} \geqslant \frac{1}{2}$. 进一步，等号成立当且仅当 $g'(t) = -2\alpha t g(t)$，其中

$\alpha > 0$，即存在 $c \neq 0$ 使得 $g(t) = c\mathrm{e}^{-\alpha t^2}$. ∎

2.4 联合时频分析

在信号分析中，对信号的刻画一般采取两种最基本的形式，即时域表示 $f(t)$ 和频域表示 $\hat{f}(\omega)$. 但 $f(t)$ 不能提供频率信息，而 $\hat{f}(\omega)$ 又隐藏了时间信息，所以这在有些场合(如非平稳信号) 并不能充分地描述信号的特性，需要采用联合时频分析.

2.4.1 Fourier 变换的局限性

我们知道，Fourier 变换在信号处理中的作用就在于它能将复杂的时域信号转换到频域中，用频谱特性去分析和表现时域信号的特性，能有效地分析平稳信号，通过频谱函数方便地指明平稳信号的主要谐波成分. 然而，在实际应用中，我们常需要分析频域特性随时间变化的非平稳信号. 如：

(1) 音乐信号：什么时候奏什么音符；

(2) 语音信号：什么时刻发什么音节；

(3) 地震信号：什么时间(位置) 出现什么样的反射波；等等.

这些都有一个共同特征：既需要研究局部时域信号所对应的频率特性，也需要研究某些频率的信息(局部频域) 出现在哪些时间段上. 这就提出了关于短时段时域信号所对应的局部频域特性即时频局部化的要求.

但是 Fourier 变换

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

对上述要求无能为力. 这是因为：

(1) Fourier 变换要求提供 $f(t)$ 在整个时域$(-\infty, +\infty)$ 上的全部信息，即任何局部的频谱特性都依赖于 $f(t)$ 在整个时域的性质.

(2) 时间信号的局部改变会影响整个频谱；频域的局部改变也会影响到整个时域的特性.

因此，必须寻求新的信号处理工具.

例如，如果我们将歌唱家唱出的歌声理解成声音振荡形成的波函数，那么 Fourier 变换的结果就是将这个波函数转换成了某种乐谱. 遗憾的是，由于 Fourier 变换无法反映信号在哪一时刻有高音哪一时刻有低音，因此所有的音符都挤在了一起，如图 2-7 所示.

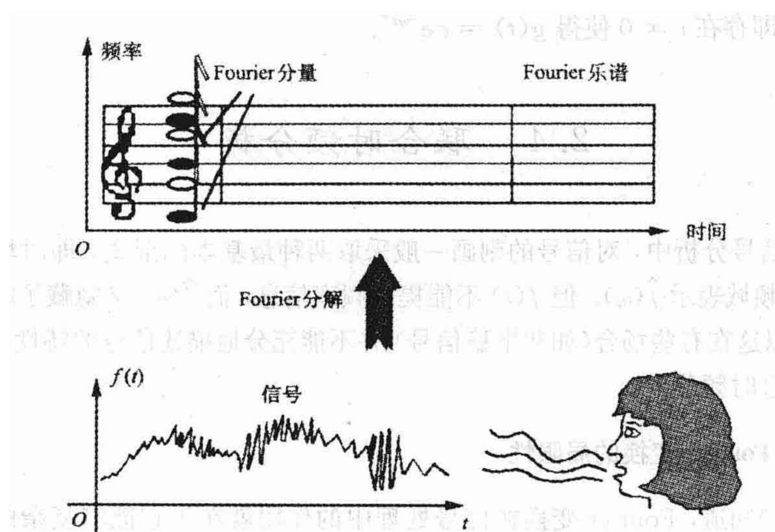


图 2-7 “Fourier”乐谱

小波变换能有效地克服 Fourier 变换的这种缺点，把信号变换到小波域后，小波不仅能检测到这段音乐的高音和低音，而且还能将高音和低音发生的位置与原始信号相对应，这对信号的检测无疑是非常有用的. 图 2-8 与 Fourier 变换的“乐谱图”相对应，可以看到小波变换的“乐谱图”更适合于人们辨认.

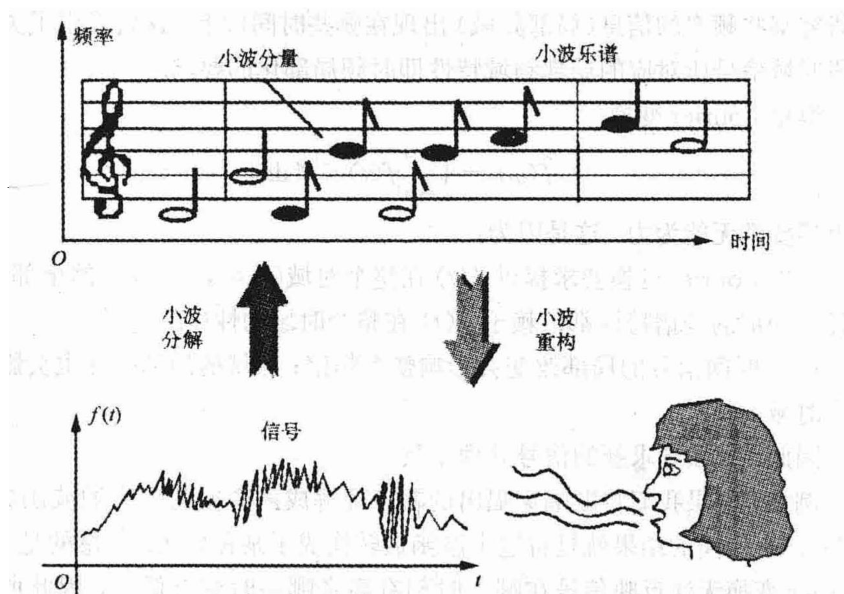


图 2-8 “小波”乐谱

2.4.2 Gabor 变换及其性质

一个很自然的想法是：若要研究 $f(t)$ 在区间 $I=[a,b]$ 上的性质，可先用区间 I 上的特征函数

$$\chi_I(t)=\begin{cases}1, & t\in[a,b],\\ 0, & t\notin[a,b]\end{cases}$$

与 $f(t)$ 相乘(图 2-5)，然后再作 Fourier 变换

$$\hat{f}_\chi(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\chi_I(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t.$$

显然，$\hat{f}_\chi(\omega)$ 反映了 $f(t)$ 在区间 I 上的频谱特性. 但由于 $f(t)\chi_I(t)$ 在 $t=a,b$ 处出现了原来 $f(t)$ 不存在的间断，导致 $\hat{f}_\chi(\omega)$ 相对于 $\hat{f}(\omega)$ 而言附加了新的高频成分，这当然不是我们所希望的.

为此，D. Gabor 在 1944 年引进了"**窗口**" **Fourier 变换**，有的文献称为 **Gabor 变换**：

$$G_f(\omega,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t, \tag{2.14}$$

其中窗口函数 $g(t)$ 是一个光滑函数，在有限区间外恒等于 0（即具有紧支集的函数）或很快地趋于 0.

例如，可取 $g(t)$ 在区间(a,b) 上恒等于 1，在$(a-\delta,a)$ 及$(b,b+\delta)$ 上光滑地由 1 变为 0（图 2-9），$\delta>0$ 是一较小正数. 与 Fourier 变换一样，$f(t)$ 的 Gabor 变换$G_f(\omega,\tau)$ 也有反演公式、乘积定理及 Parseval 等式：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}g(t-\tau)G_f(\omega,\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{2.15}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G_f(\omega,\tau)\overline{G_h(\omega,\tau)}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\tau=2\pi\langle f,h\rangle, \tag{2.16}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|G_f(\omega,\tau)|^2\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\tau=2\pi\|f\|_2^2. \tag{2.17}$$

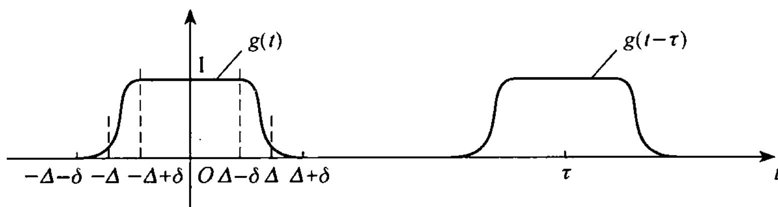


图 2-9

我们来证明以上 3 个式子.

首先，令 $h(t)=f(t)g(t-\tau)$，则(2.14)式即 $h(t)$ 的 Fourier 变换：

$$G_f(\omega,\tau)=\hat{h}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t,$$

其反演公式为

$$\begin{aligned}f(t)g(t-\tau)=h(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{h}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}G_f(\omega,\tau)\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

两端同乘 $g(t-\tau)$，并对 τ 积分，有

$$f(t)\int_{-\infty}^{+\infty}(g(t-\tau))^2\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}g(t-\tau)G_f(\omega,\tau)\mathrm{d}\tau.$$

根据实函数 $g(t)$ 的取法，适当调整 a,b 的值，即可使

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(g(t-\tau))^2\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}(g(t))^2\mathrm{d}t=1,\tag{2.18}$$

代入上式，即得(2.15).

其次，对 $k_1(t)=f(t)g(t-\tau)$，$k_2(t)=h(t)g(t-\tau)$ 利用 Fourier 变换的乘积定理：$2\pi\langle k_1,k_2\rangle=\langle\hat{k}_1,\hat{k}_2\rangle$，有

$$2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}k_1(t)\overline{k_2(t)}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}G_f(\omega,\tau)\overline{G_h(\omega,\tau)}\,\mathrm{d}\omega.$$

将上式两边对 τ 积分，得

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G_f(\omega,\tau)\overline{G_h(\omega,\tau)}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\tau\\&=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\overline{h(t)}(g(t-\tau))^2\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau\\&=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\overline{h(t)}\int_{-\infty}^{+\infty}(g(t-\tau))^2\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t\\&=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\overline{h(t)}\,\mathrm{d}t\\&=2\pi\langle f,h\rangle.\end{aligned}$$

此即(2.16)式.

最后，在(2.16)式中，取 $h(t)=f(t)$，即得(2.17)式.

根据 Gabor 变换的定义，$G_f(\omega,\tau)$ 反映信号 $f(t)$ 在 $t=\tau$ 附近的频谱特性，而且由于有反演公式(2.15)，可见 $G_f(\omega,\tau)$ 确实包含了 $f(t)$ 的全部信息. 此外，Gabor 变换的窗口位置随 τ 而变(平移)，符合研究信号在不同时刻的局部特性的要求.

这是 Gabor 变换比 Fourier 变换的优越之处，因此在信号处理、通信理论中曾经发挥过一定作用.

但是，Gabor 变换也有根本的缺陷：

(1) Gabor 变换的窗口形状与大小保持不变，与频率无关.

事实上，对于非平稳信号，在研究高频信号的局部性质时，要求窗口开得小一些，而在研究低频信号的局部性质时，要求窗口开得大一些. 这就是说，窗口的大小应随频率而变：高频开小窗，低频开大窗. 这才符合在实际问题中高频信号的分辨率应高于低频信号的分辨率的要求.

(2) Gabor 变换不论怎样离散化，都不可能成为一组正交基.

为了有利于数值计算或方便计算机处理，必须将连续依赖于参数的 Gabor 变换离散化. 我们知道，将 Fourier 变换离散化后即得按正交函数展开的 Fourier 级数. 这在理论上或数值计算中都是非常重要的. 遗憾的是，已经有人证明：不论怎样离散化，Gabor 变换都不可能成为一组正交基. 正因为如此，Gabor 变换未能得到广泛应用与进一步发展.

2.4.3 小波分析的迅速发展

自从 A. Grossmann 和 J. Morlet 于 1984 年首先定义了“小波”并提出了小波变换(Wavelet Transform) 的概念之后，小波分析的理论与应用得到了迅速发展.

直观上看，小波变换

$$W_f(a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}\mathrm{d}t$$

中的参数 a,b 分别与 Gabor 变换(2.14) 中的参数 ω,τ 相对应. 显然，参数 b 与 τ 都起着平移的作用，改变窗口位置. 本质不同的是参数 a 与 ω，后者的变化不改变“窗口”的大小与形状，而前者的变化不仅改变连续小波的频谱结构，而且也改变其窗口的大小与形状.

小波变换继承和发展了 Gabor 变换局部化的思想，同时又克服了 Gabor 变换的窗口大小不随频率变化、缺乏离散正交基等缺点，是比较理想的对信号进行局部频谱分析的强有力的数学工具.

2.5 正交小波基

2.5.1 离散小波变换

前面，我们介绍了连续小波

$$\psi_{ab}(t)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

及相应的小波变换

$$W_f(a,b)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\overline{\psi_{ab}(t)}\,\mathrm{d}t,$$

这种连续依赖于参数 a,b 的小波变换主要用于理论分析和论证，在实际应用和数值计算中更重要的是如下定义的**离散小波**：

$$\psi_{jk}(t)=a_0^{\frac{j}{2}}\psi(a_0^j t-kb_0),\quad j,k\in\mathbf{Z},\tag{2.19}$$

其中 $a_0>0$，$b_0>0$，$\mathbf{Z}$ 表示全体整数所构成的集合.

定义 2.5 设 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，$\psi(t)$ 是一个基本小波，令

$$C_f(j,k)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\overline{\psi_{jk}(t)}\,\mathrm{d}t,\quad j,k\in\mathbf{Z},\tag{2.20}$$

则称 $C_f(j,k)$ 为 $f(t)$ 的**离散小波变换**.

我们知道，对于连续小波变换 $W_f(a,b)$，$a,b\in\mathbf{R}$，$a\neq0$，利用反演公式

$$f(t)=\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}W_f(a,b)\psi_{ab}(t)\,\frac{1}{a^2}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b,$$

可唯一确定函数 $f(t)$. 但是，对于离散小波变换，由 $\{C_f(j,k)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 能否唯一确定 $f(t)$ 则是需要进一步研究的基本问题.

为了便于计算机处理，在离散小波(2.19)中，总是取 $a_0=2$，$b_0=1$.

定义 2.6 设 $\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})$，$\psi(t)$ 是一个基本小波，且

$$\psi_{jk}(t)=2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j t-k),\quad j,k\in\mathbf{Z}\tag{2.21}$$

构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个标准正交基，即 $\{\psi_{jk}(t)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 中的一个完备的标准正交系：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{jk}(t)\,\overline{\psi_{j'k'}(t)}\,\mathrm{d}t=\begin{cases}1, & (j,k)=(j',k'),\\ 0, & (j,k)\neq(j',k'),\end{cases}\tag{2.22}$$

则称 $\psi(t)$ 是一个**正交小波**，而称 $\{\psi_{jk}(t)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的**正交小波基**.

若 $\{\psi_{jk}(t)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个正交小波基，则对于 $L^2(\mathbf{R})$ 中的任一函数 $f(t)$，都有展开式

$$f(t)=\sum_{j,k\in\mathbf{Z}}C_f(j,k)\psi_{jk}(t),\tag{2.23}$$

其中 $C_f(j,k)$，$j,k\in\mathbf{Z}$ 由(2.20)式所确定.

这种由一个函数的平移和伸缩所构成的正交基 $\{\psi_{jk}(t)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 和展开式(2.23)，当然是非常重要且十分有用的. 问题是：这样的正交小波 $\psi(t)$ 是否存在？怎样构造？这正是我们所要解决的问题.

2.5.2 标准正交系的频域特征

一个函数的整数平移是否构成标准正交系，可用其频域特征来刻画. 这对于讨论正交小波的构造以及相关理论具有重要的意义.

定理2.5 设 $f(t),g(t)\in L^2(\mathbf{R})$，则

$$\langle f(t-k),g(t-l)\rangle=\delta_{kl},\quad \forall k,l\in\mathbf{Z} \tag{2.24}$$

的充分必要条件是

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}\hat{f}(\omega+2k\pi)\,\overline{\hat{g}(\omega+2k\pi)}=1. \tag{2.25}$$

证 因为 $F(f(t-\Delta))=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\omega}\hat{f}(\omega)$，利用 Parseval 等式，有

$$\begin{aligned}&\langle f(t-k),g(t-l)\rangle\\&=\frac{1}{2\pi}\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}\hat{f}(\omega),\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\omega}\hat{g}(\omega)\rangle\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\,\overline{\hat{g}(\omega)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-l)\omega}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi}\hat{f}(\omega)\,\overline{\hat{g}(\omega)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-l)\omega}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\int_{0}^{2\pi}\hat{f}(\omega+2n\pi)\,\overline{\hat{g}(\omega+2n\pi)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-l)\omega}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\hat{f}(\omega+2n\pi)\,\overline{\hat{g}(\omega+2n\pi)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-l)\omega}\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

记 $F(\omega)=\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}}\hat{f}(\omega+2n\pi)\,\overline{\hat{g}(\omega+2n\pi)}$，则 $F(\omega)$ 是 2π 周期函数.

若 $F(\omega)=1$，则

$$\langle f(t-k),g(t-l)\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-l)\omega}\mathrm{d}\omega=\delta_{kl},\quad \forall k,l\in\mathbf{Z}.$$

反之，若(2.24)式成立，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-l)\omega}\mathrm{d}\omega=\delta_{kl},\quad \forall k,l\in\mathbf{Z}.$$

这表明在 $F(\omega)$ 的 Fourier 级数 $F(\omega)=\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}}C_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega}$ 中，其系数

$$C_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\omega)\mathrm{d}\omega=1,$$

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega}\mathrm{d}\omega=0\quad(n\neq 0).$$

可见，$F(\omega)=\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}}C_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega}=1.$ ∎

定理2.6 设 $\varphi(t)\in L^2(\mathbf{R})$，则 $\{\varphi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是标准正交系的充分必要条件是

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2=1 \tag{2.26}$$

对任意 $\omega\in\mathbf{R}$ 成立.

证 这只需在定理 2.5 中取 $f(t)=g(t)=\varphi(t)$，即得证. ▮

例 2.4 Shannon 函数

$$\varphi(t)=\frac{\sin\pi t}{\pi t} \tag{2.27}$$

的整数平移 $\{\varphi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$，称为 Shannon 函数系. 因为

$$\hat{\varphi}(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\leqslant\pi,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

显然有

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2=1,$$

因此，Shannon 函数系 $\{\varphi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是一个标准正交系.

进一步，对于任一固定的 $j\in\mathbf{Z}$，函数系 $\{2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^jt-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是一个标准正交系.

例 2.5 证明两个重要的恒等式：

(1) $$\sum_{k\in\mathbf{Z}}\frac{1}{(\omega+k\pi)^2}=\frac{1}{\sin^2\omega}; \tag{2.28}$$

(2) $$\sum_{k\in\mathbf{Z}}\frac{1}{(\omega+k\pi)^4}=\frac{1}{\sin^4\omega}-\frac{2}{3}\frac{1}{\sin^2\omega}. \tag{2.29}$$

解 (1) 考虑 Haar 函数

$$\varphi(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{2.30}$$

的整数平移 $\{\varphi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$. 若 $k\neq l$，则 $\varphi(t-k)$ 与 $\varphi(t-l)$ 的支撑集不相交，所以

$$\langle\varphi(t-k),\varphi(t-l)\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t-k)\,\overline{\varphi(t-l)}\,\mathrm{d}t=\begin{cases}1, & k=l,\\ 0, & k\neq l.\end{cases}$$

故 $\{\varphi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是一个标准正交系. 另一方面，因为 $\varphi(t)$ 的 Fourier 变换为

$$\hat{\varphi}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}-1}{-\mathrm{i}\omega},$$

所以

$$|\hat{\varphi}(\omega)|^2=\frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2}=\frac{4\sin^2\frac{\omega}{2}}{\omega^2}.$$

根据定理 2.6，有

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)}{\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)^2}=1.$$

注意到 $\sin^2\omega$ 是以 π 为周期的周期函数，由上式即得(2.28) 式.

(2) 为了证明(2.29) 式，只需对(2.28) 式两端微分两次，再化简即可.

下面我们给出一个是基本小波但不是正交小波的例子.

例 2.6 考虑线性样条函数

$$\psi(t)=\begin{cases}|1+t|-1, & -2\leqslant t<0,\\ 1-|1-t|, & 0\leqslant t<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\tag{2.31}$$

从几何上看，$\psi(t)$ 显然是一个基本小波(图 2-10).

为了证明 $\psi(t)$ 不是正交小波，只需证明整数平移系 $\{\psi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 不是标准正交系即可.

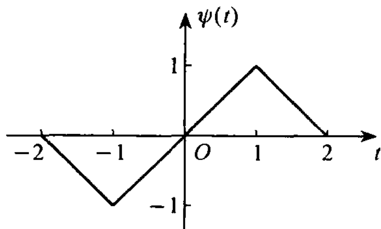


图 2-10

易知 $\psi(t)=s(t)-s(t+2)$，其中

$$s(t)=\begin{cases}t, & 0\leqslant t<1,\\ 2-t, & 1\leqslant t<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

根据第一章例 1.21 的结果以及 Fourier 变换的位移性质，得

$$\hat{\psi}(\omega)=\hat{s}(\omega)-e^{2i\omega}\hat{s}(\omega)=(1-e^{2i\omega})\left(\frac{1-e^{-i\omega}}{i\omega}\right)^2=-8i\sin\omega\frac{\sin^2\frac{\omega}{2}}{\omega^2}.$$

因为(这里需利用恒等式(2.29))

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(\omega+2k\pi)|^2&=4\sum_{k\in\mathbf{Z}}\sin^2(\omega+2k\pi)\frac{\sin^4\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)}{\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)^4}\\&=4\sin^2\omega\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{\omega}{2}\right)\neq1,\end{aligned}$$

所以 $\psi(t)$ 不是正交小波.

定理 2.7 设 W 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的任一子空间，函数系 $\{f(t-k),k\in\mathbf{Z}\}$ 与 $\{g(t-k),k\in\mathbf{Z}\}$ 都构成 W 的标准正交基.

(1) 如果 $\hat{f}(\omega)$ 和 $\hat{g}(\omega)$ 分别是 $f(t),g(t)$ 的 Fourier 变换，那么存在一

个满足$|\alpha(\omega)|=1$的2π周期函数$\alpha(\omega)$，使得

$$\hat{g}(\omega)=\alpha(\omega)\hat{f}(\omega). \tag{2.32}$$

(2) 如果$f(t),g(t)$都是紧支撑的，那么存在$a\in\mathbf{C}$，$k_0\in\mathbf{Z}$，使得

$$g(t)=af(t-k_0). \tag{2.33}$$

证 因为$\{f(t-k),k\in\mathbf{Z}\}$是$W$的标准正交基，$g(t)\in W$，所以

$$g(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_kf(t-k), \tag{2.34}$$

其中$c_k=\langle g(t),f(t-k)\rangle$，$k\in\mathbf{Z}$.

(1) 对(2.34)式两边取 Fourier 变换，得

$$\hat{g}(\omega)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}\hat{f}(\omega)=\alpha(\omega)\hat{f}(\omega), \tag{2.35}$$

其中

$$\alpha(\omega)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}. \tag{2.36}$$

显然$\alpha(\omega)$是2π周期函数. 根据定理 2.6，有

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{f}(\omega+2k\pi)|^2=1,$$

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{g}(\omega+2k\pi)|^2=1.$$

将上述两式一并代入(2.35)式，即得$|\alpha(\omega)|=1$.

(2) 利用(1)的结论，有$\hat{g}(\omega)=\alpha(\omega)\hat{f}(\omega)$，其中$\alpha(\omega)$的展开式的系数为

$$c_k=\langle g(t),f(t-k)\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\,\overline{f(t-k)}\,\mathrm{d}t.$$

因为$f(t),g(t)$都是紧支撑的，所以只有有限个$c_k\neq 0$. 利用第一章例 1.29 的结论，存在常数$a\in\mathbf{C}$，$k_0\in\mathbf{Z}$，使得$\alpha(\omega)=a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0\omega}$，因此有

$$\hat{g}(\omega)=a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0\omega}\hat{f}(\omega).$$

对上式两边作 Fourier 逆变换，即得$g(t)=af(t-k_0)$.

2.5.3 Haar 正交小波基

现在我们给出$L^2(\mathbf{R})$的一个正交小波基.

设小波母函数是例 2.1 中由(2.2)式给出的 Haar 小波，即

$$h(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<\dfrac{1}{2},\\ -1, & \dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

显然，$\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t = 0$，$\int_0^1 |h(t)|^2 \mathrm{d}t = 1$. 相应的离散小波为

$$h_{jk}(t) = 2^{\frac{j}{2}} h(2^j t - k) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}}, & \frac{k}{2^j} \leqslant t < \frac{2k+1}{2^{j+1}}, \\ -2^{\frac{j}{2}}, & \frac{2k+1}{2^{j+1}} \leqslant t \leqslant \frac{k+1}{2^j}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

称之为 Haar 系，如图 2-11 所示. 下面证明 Haar 系 $\{h_{jk}(t)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个标准正交基. 大致分为两个步骤：先证正交性，再证完备性.

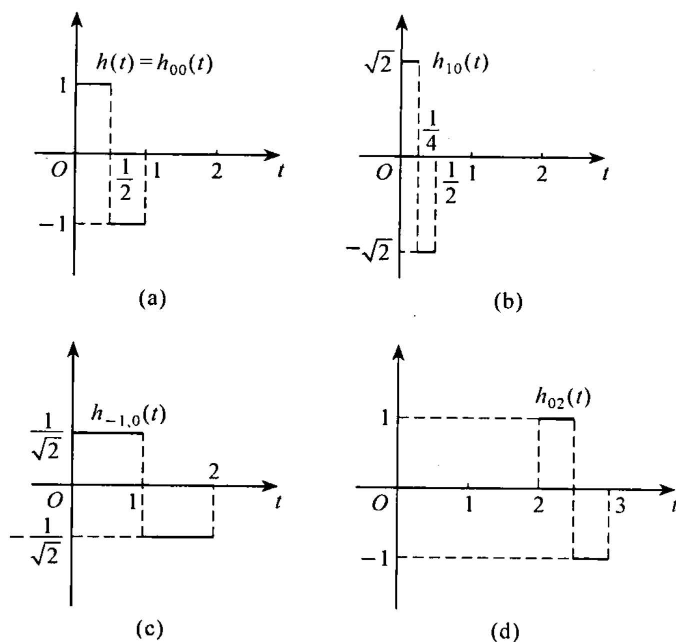


图 2-11

定理 2.8 Haar 系 $\{h_{jk}(t)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 中的标准正交系.

证 规范性 当 $(j,k) = (j',k')$ 时，显然有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h_{jk}(t)|^2 \mathrm{d}t = 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} |h(2^j t - k)|^2 \mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |h(u)|^2 \mathrm{d}u = 1.$$

正交性 当 $(j,k) \neq (j',k')$ 时，只需考虑 $j > j'$ 的情形，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_{jk}(t)\, \overline{h_{j'k'}(t)}\, \mathrm{d}t = 2^{\frac{j+j'}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(2^j t - k) h(2^{j'} t - k')\mathrm{d}t.$$

令 $u = 2^{j'}t - k'$, $m = 2^{j-j'}k' - k$，则

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} h_{jk}(t)\overline{h_{j'k'}(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= 2^{\frac{j-j'}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} h(2^{j-j'}u+m)h(u)\,\mathrm{d}u \\
&= 2^{\frac{j-j'}{2}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} h(2^{j-j'}u+m)\,\mathrm{d}u - \int_{\frac{1}{2}}^{1} h(2^{j-j'}u+m)\,\mathrm{d}u\right) \\
&= 2^{\frac{j'-j}{2}}\left(\int_m^{2^{j-j'-1}+m} h(u)\,\mathrm{d}u - \int_{2^{j-j'-1}+m}^{2^{j-j'}+m} h(u)\,\mathrm{d}u\right) = 0.
\end{aligned}
$$

这是因为，上式右端的第一项为

$$
\int_m^{2^{j-j'-1}+m} h(u)\,\mathrm{d}u = \sum_{l=m+1}^{2^{j-j'-1}+m}\int_{l-1}^{l} h(u)\,\mathrm{d}u = 0.
$$

第二项同理也为 0.

所以 $\{h_{jk}(t)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 中的标准正交系. ∎

为了证明 Haar 系的完备性，先引进两个有用的线性算子.

考虑由 Haar 函数(2.30) 的二进伸缩与整数平移

$$
\varphi_{jk}(t) = 2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j t - k), \quad j,k \in \mathbf{Z}
$$

所生成的闭子空间

$$
V_j = \overline{\mathrm{span}}\{\varphi_{jk}(t),\ k \in \mathbf{Z}\}, \quad j \in \mathbf{Z},
$$

以及由 Haar 系 $\{h_{jk}(t)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 所生成的闭子空间

$$
W_j = \overline{\mathrm{span}}\{h_{jk}(t),\ k \in \mathbf{Z}\}, \quad j \in \mathbf{Z}.
$$

定义 2.7 对任一固定的 $j \in \mathbf{Z}$，定义线性算子 P_j 如下：

$$
P_j f(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}}\langle f,\varphi_{jk}\rangle\varphi_{jk}(t), \quad \forall f(t) \in L^2(\mathbf{R}).
$$

容易验证，P_j 是由 $L^2(\mathbf{R})$ 到子空间 V_j 的一个正交投影算子. 注意到

$$
\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t-1),
$$
$$
h(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t-1),
$$

所以，线性算子 $Q_j = P_{j+1} - P_j$ 是由 $L^2(\mathbf{R})$ 到子空间 W_j 的一个正交投影算子，且

$$
Q_j f(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}}\langle f,h_{jk}\rangle h_{jk}(t), \quad \forall f(t) \in L^2(\mathbf{R}).
$$

定理 2.9 设 $f(t) \in C_c^0(\mathbf{R})$，则

(1) $\lim\limits_{j\to+\infty}\|P_j f - f\|_2 = 0$;

(2) $\lim\limits_{j\to-\infty}\|P_j f\|_2 = 0$.

证 (1) 设 $f(t)\in C_c^0(\mathbf{R})$ 的支集 $\operatorname{supp} f(t)\subseteq[-2^N,2^N]$，其中 $N\in\mathbf{Z}^+$，则 $\forall\varepsilon>0$，存在 $J\in\mathbf{Z}^+$ 和函数 $g(t)\in V_J$，使得

$$\|f-g\|_\infty=\max_{t\in\mathbf{R}}|f(t)-g(t)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2^{N+3}}}.$$

对于 $j\geqslant J$，有 $P_jg(t)=g(t)$，且

$$\begin{aligned}\|P_jf-f\|_2&\leqslant\|P_j(f-g)\|_2+\|P_jg-g\|_2+\|g-f\|_2\\&=\|P_j(f-g)\|_2+\|g-f\|_2\\&\leqslant 2\|g-f\|_2.\end{aligned}$$

因为

$$\|g-f\|_2^2=\int_{-2^N}^{2^N}|f(t)-g(t)|^2\mathrm{d}t<\int_{-2^N}^{2^N}\frac{\varepsilon^2}{2^{N+3}}\,\mathrm{d}t=\frac{\varepsilon^2}{4},$$

所以

$$\|P_jf-f\|_2\leqslant 2\|g-f\|_2<\varepsilon.$$

这就证得 $\lim\limits_{j\to+\infty}\|P_jf-f\|_2=0$.

(2) 设 $f(t)$ 的支集 $\operatorname{supp} f(t)\subseteq[-A,A]$，其中 $A>0$ 为常数，则当 j 充分大时，有 $2^j>A$，于是

$$\begin{aligned}\|P_{-j}f\|_2^2&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\langle P_{-j}f,\varphi_{-j,k}\rangle|^2=\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\langle f,\varphi_{-j,k}\rangle|^2\\&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\overline{\varphi_{-j,k}(t)}\,\mathrm{d}t\right|^2\\&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left|\int_{-A}^{A}f(t)\,\overline{\varphi_{-j,k}(t)}\,\mathrm{d}t\right|^2\\&\leqslant\sum_{k\in\mathbf{Z}}\int_{-A}^{A}|f(t)|^2\mathrm{d}t\int_{-A}^{A}|\varphi_{-j,k}(t)|^2\mathrm{d}t\\&=2^{-j}\|f\|_2^2\sum_{k\in\mathbf{Z}}\int_{-A}^{A}|\varphi(2^{-j}t-k)|^2\mathrm{d}t\\&=2^{-j+1}A\|f\|_2^2\to 0\quad(j\to+\infty),\end{aligned}$$

这就证得 $\|P_jf\|_2\to 0\ (j\to-\infty)$. ∎

定理 2.10 Haar 系 $\{h_{jk}(t)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 中的完备系.

证 根据定理 1.8 (7)，只需证明：若 $f(t)\in C_c^0(\mathbf{R})$，则

$$f(t)\in\overline{\operatorname{span}}\{h_{jk}(t),\ j,k\in\mathbf{Z}\}.$$

为此，任取 $J\in\mathbf{Z}^+$，由于

$$\sum_{j=-J}^{J-1}Q_jf(t)=\sum_{j=-J}^{J-1}(P_{j+1}-P_j)f(t)$$

$$= \sum_{j=-J}^{J-1} P_{j+1} f(t) - \sum_{j=-J}^{J-1} P_j f(t)$$
$$= P_J f(t) - P_{-J} f(t),$$

所以

$$\left\| f - \sum_{j=-J}^{J-1} Q_j f \right\|_2 = \| f - P_J f + P_{-J} f \|_2$$
$$\leqslant \| P_J f - f \|_2 + \| P_{-J} f \|_2.$$

根据定理 2.9 知

$$\lim_{J \to +\infty} (\| P_J f - f \|_2 + \| P_{-J} f \|_2) = 0,$$

因此，有

$$\lim_{J \to +\infty} \left\| f - \sum_{j=-J}^{J-1} Q_j f \right\|_2 = 0.$$

另一方面，显然有

$$\sum_{j=-J}^{J-1} Q_j f(t) = \sum_{j=-J}^{J-1} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle f, h_{jk} \rangle h_{jk}(t) \in \operatorname{span}\{h_{jk}(t),\ j,k \in \mathbf{Z}\},$$

所以，$f(t) \in \overline{\operatorname{span}}\{h_{jk}(t),\ j,k \in \mathbf{Z}\}$. ▮

综合定理 2.8 与定理 2.10 的结论可知，Haar 系是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个标准正交基. 因此，Haar 小波是正交小波.

因为 Haar 小波在区间 $[0,1]$ 外恒等于零，所以它具有很好的局部性. 但由于 $h(t)$ 在 $t = 0, \frac{1}{2}, 1$ 处不连续，其光滑性太差，因此实用性不大.

毫无疑问，一个理想的正交小波基当然应该是由一个同时具有很好的局部性与光滑性的小波而得到. 然而，构造如此“好”的小波并非易事！本书第三章与第四章将详细讨论正交小波的构造.

2.6 小波的正则性

正则性一般用来刻画函数的光滑程度，正则性越高，函数越光滑. 所以，正则性就是我们熟知的函数的连续性与可微性等概念的延伸与拓广. 此外，与正则性相对立的概念是奇异性. 小波分析的一个重要应用就是检测和分析信号的奇异性. 为了刻画奇异性，必须对函数的正则性有精确的刻画. 在这一节，我们先介绍 Hölder 正则性的概念，然后讨论连续小波变换与正则性的关系.

2.6.1 Hölder 正则性

定义 2.8 设 $f(t)$ 是区间 $[a,b]$ 上的有界函数，对于 $0<\alpha\leqslant 1$，以及常数 $C>0$，恒有

$$|f(t_1)-f(t_2)|\leqslant C|t_1-t_2|^{\alpha},\quad \forall t_1,t_2\in[a,b],\tag{2.37}$$

则称 $f(t)$ **在 $[a,b]$ 上具有指数 α 的 Hölder 连续性或 Lipschitz 连续性.**

这里，区间 $[a,b]$ 可以是有限的，也可以是整个实轴 **R**. 如果区间 $[a,b]$ 是有限的闭区间，则定义中的有界函数这一要求可以去掉，它是自然满足的. 区间 $[a,b]$ 上具有指数 α 的 Hölder 连续性的函数的全体构成一个 Banach 空间，记为 C^{α}.

根据定义可知，如果 $0<\beta<\alpha$，那么

$$C^{\alpha}\subset C^{\beta}.\tag{2.38}$$

对于函数 $f(t)$，使 $f(t)\in C^{\alpha}$ 的 α 的上界称为函数 $f(t)$ 的 **Hölder 正则性指数**:

$$\alpha=\sup_{\beta}\{f(t)\in C^{\beta}\}.\tag{2.39}$$

函数除了在区间上的 Hölder 连续性以外，还可定义在一点的 Hölder 连续性.

定义 2.9 设 $f(t)$ 是区间 $[a,b]$ 上的有界函数，$t_0\in(a,b)$，对于 $0<\alpha\leqslant 1$，以及常数 $C>0$，恒有

$$|f(t_0+h)-f(t_0)|\leqslant C|h|^{\alpha},\quad t_0+h\in[a,b],\tag{2.40}$$

则称 $f(t)$ **在点 t_0 具有指数 α 的 Hölder 连续性.**

与式(2.39)定义的一样，函数 $f(t)$ 在点 t_0 的 Hölder 指数的上界，称为**函数 $f(t)$ 在点 t_0 的 Hölder 正则性指数.**

对于函数的 Hölder 指数 α，也可以有大于 1 的情形.

定义 2.10 对于 $\alpha=n+\beta$，n 为正整数，$0<\beta\leqslant 1$，如果有界函数 $f(t)$ 具有直到 n 阶连续导数，且 n 阶导数 $f^{(n)}(t)$ 对某个常数 $C>0$，满足

$$|f^{(n)}(t_1)-f^{(n)}(t_2)|\leqslant C|t_1-t_2|^{\beta},\quad \forall t_1,t_2\in[a,b],\tag{2.41}$$

则称 $f(t)$ **在区间 $[a,b]$ 上具有指数 α 的 Hölder 连续性.**

对于在点 t_0 的 Hölder 指数也可类似定义.

函数 $f(t)$ 在整个实轴 **R** 上具有指数 α 的 Hölder 连续性，可由 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}(\omega)$ 的衰减性推出.

定理 2.11 设函数 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 在 **R** 上连续. 如果

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(\omega)|(1+|\omega|^{\alpha})\mathrm{d}\omega<+\infty,\tag{2.42}$$

则 $f(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界，并且具有指数 α 的 Hölder 连续性.

证 函数的有界性由 Fourier 逆变换及条件(2.42) 即得

$$|f(t)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(\omega)|d\omega$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(\omega)|(1+|\omega|^{\alpha})d\omega<+\infty.$$

下面证明：对于 $0<\alpha\leqslant1$，Hölder 条件(2.37) 成立，即证存在常数 $C>0$，使得 $\forall x,y\in\mathbf{R}$，$x\neq y$，有

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}\leqslant C.$$

根据函数的 Fourier 逆变换，有

$$\frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{\alpha}}\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(\omega)|\frac{|\exp(i\omega x)-\exp(i\omega y)|}{|x-y|^{\alpha}}d\omega. \quad (2.43)$$

为了估计式(2.43) 右端的积分，把 $|x-y|$ 分为 $|x-y|^{-1}\leqslant|\omega|$ 与 $|x-y|^{-1}\geqslant|\omega|$ 两部分. 当 $|x-y|^{-1}\leqslant|\omega|$ 时，有

$$\frac{|\exp(i\omega x)-\exp(i\omega y)|}{|x-y|^{\alpha}}\leqslant\frac{2}{|x-y|^{\alpha}}\leqslant2|\omega|^{\alpha};$$

当 $|x-y|^{-1}\geqslant|\omega|$ 时，有

$$\frac{|\exp(i\omega x)-\exp(i\omega y)|}{|x-y|^{\alpha}}\leqslant\frac{C'|\omega||x-y|}{|x-y|^{\alpha}}=\frac{C'|\omega|}{|x-y|^{-1+\alpha}}$$

$$\leqslant\frac{C'|\omega|}{|\omega|^{1-\alpha}}=C'|\omega|^{\alpha}\quad(0<C'<+\infty).$$

将积分(2.43) 按 $|x-y|^{-1}\leqslant|\omega|$ 与 $|x-y|^{-1}\geqslant|\omega|$ 分为两部分，得

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(2+C')|\hat{f}(\omega)||\omega|^{\alpha}d\omega=C.$$

故由条件(2.42) 知，$C<+\infty$. ∎

这就是说，Fourier 变换是度量函数 $f(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的全局正则性的有效工具，但并不能从 $|\hat{f}(\omega)|$ 在高频 ω 的衰减性分析出 $f(t)$ 在指定点 t_0 及一个有限区间上的 Hölder 正则性. 而由于小波具有很好的局部性，所以小波可以给出函数在一个区间甚至在一个点处的 Hölder 正则性.

小波 $\psi(t)$ 的正则性主要影响着小波系数的数值稳定性. 假设由小波系数 $C_f(j,k)=\langle f,\psi_{jk}\rangle$ 可得到如下的重构公式：

$$f(t)=\sum_{j\in\mathbf{Z}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}C_f(j,k)\psi_{jk}(t),$$

如果 $C_f(j,k)$ 不发生任何改变地重构，那么得到的 $f(t)$ 是精确的；但若

$C_f(j,k)$ 产生了误差 ε（例如不可避免的截断误差，信号压缩时的量化，信号去噪时的阈值化等都属于这类情况），则导致重构信号 $f(t)$ 增加了误差 $\hat{\varepsilon}$. 对于光滑的小波 $\psi(t)$，误差 $\hat{\varepsilon}$ 也是光滑的，即只要原始误差 ε 不太大，则最终误差 $\hat{\varepsilon}$ 也不会太大，也就是说不会出现非正则的奇异误差.

2.6.2 小波变换与正则性分析

现在，我们讨论连续小波变换与 Hölder 正则性的关系.

设 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 的连续小波变换为

$$W_f(a,b)=\langle f,\psi_{ab}\rangle=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}\,\mathrm{d}t,$$

其中 $\psi_{ab}(t)$ 由式(2.7) 确定.

定理2.12 设小波 $\psi(t)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|t|)\,|\psi(t)|\,\mathrm{d}t<+\infty,$$

及 $\hat{\psi}(0)=0$. 如果一个有界函数 $f(t)$ 具有指数 α $(0<\alpha\leqslant 1)$ 的 Hölder 连续性，即式(2.37) 对 $\mathbf{R}$ 成立，那么 $f(t)$ 的小波变换满足

$$|W_f(a,b)|\leqslant C'|a|^{\alpha+\frac{1}{2}}. \tag{2.44}$$

证 因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\mathrm{d}t=0$，所以有

$$\langle f,\psi_{ab}\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}|a|^{-\frac{1}{2}}\,\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}(f(t)-f(b))\mathrm{d}t.$$

因此

$$\begin{aligned}|W_f(a,b)|&\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|a|^{-\frac{1}{2}}\left|\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right|C|t-b|^{\alpha}\mathrm{d}t\\&\leqslant C|a|^{\alpha+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(y)|\,|y|^{\alpha}\mathrm{d}y\\&\leqslant C'|a|^{\alpha+\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

∎

以下是定理 2.12 的逆定理.

定理2.13 设 $\psi(t)$ 是紧支撑小波，函数 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 是有界且连续的. 如果对于某个 $\alpha\in(0,1)$，$f(t)$ 的小波变换满足

$$|W_f(a,b)|\leqslant C|a|^{\alpha+\frac{1}{2}}, \tag{2.45}$$

那么 $f(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上具有指数 α 的 Hölder 连续性.

证 选择 $\psi^2(t)$ 是紧支撑的连续可微函数，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^2(t)\mathrm{d}t=0$，以及 $C_{\psi,\psi^2}=1$，则有反演公式(见文献[74],[103])：

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\langle f,\psi_{ab}\rangle\psi_{ab}^2(t)\mathrm{d}b\right)\frac{\mathrm{d}a}{a^2}.$$

将上式右边按外层的积分分为两部分：记 $|a|\leqslant 1$ 时为 $f_S(t)$，$|a|\geqslant 1$ 时为 $f_L(t)$.

先估计 $f_L(t)$. 一方面，$f_L(t)$ 关于 t 是一致有界的，即

$$\begin{aligned}|f_L(t)|&\leqslant\int_{|a|\geqslant 1}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi_{ab}^2(t)|\mathrm{d}b\right)\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\|f\|_2\|\psi\|_2\\&\leqslant C\int_{|a|\geqslant 1}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|a|^{-\frac{1}{2}}\left|\psi^2\left(\frac{t-b}{a}\right)\right|\mathrm{d}b\right)\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\\&\leqslant C\|\psi^2\|_1\int_{|a|\geqslant 1}|a|^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}a\\&=C'<+\infty.\end{aligned}\tag{2.46}$$

另一方面，对于 $|h|\leqslant 1$，估计 $\Delta_L(h)=|f_L(t+h)-f_L(t)|$，得

$$\Delta_L(h)\leqslant\int_{|a|\geqslant 1}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\psi^2\left(\frac{t+h-b}{a}\right)-\psi^2\left(\frac{t-b}{a}\right)\right|\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(y)|\left|\psi\left(\frac{y-b}{a}\right)\right|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}b\right\}\frac{\mathrm{d}a}{|a|^3}.$$

因为

$$|\psi^2(t+h)-\psi^2(t)|\leqslant C|h|,\tag{2.47}$$

并且存在正数 A，使 $\mathrm{supp}\,\psi$，$\mathrm{supp}\,\psi^2\subset[-A,A]$，所以

$$\begin{aligned}\Delta_L(h)&\leqslant C'|h|\int_{|a|\geqslant 1}a^{-4}\left\{\iint\limits_{\substack{|y-t|\leqslant|a|A+1\\|y-b|\leqslant|a|A}}|f(y)|\mathrm{d}y\,\mathrm{d}b\right\}\mathrm{d}a\\&\leqslant C''|h|\int_{|a|\geqslant 1}|a|^{-3}\left(\int_{|y-t|\leqslant 2|a|A+1}|f(y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}a\\&\leqslant C''|h|\,\|f\|_2\int_{|a|\geqslant 1}|a|^{-3}(4|a|A+2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}a\\&\leqslant C'''|h|.\end{aligned}$$

再结合一致有界式(2.46)，即得

$$|f_L(t+h)-f_L(t)|\leqslant C|h|,\quad\forall h\in(-\infty,+\infty)$$

关于 t 一致成立. 注意，在上述论述中，我们甚至没有使用式(2.45)，所以说，$f_L(t)$ 总是正则的.

下面估计 $f_S(t)$. 首先，$f_S(t)$ 也是一致有界的(注意式(2.45))：

$$|f_S(t)| \leqslant \int_{|a|\leqslant 1}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} C|a|^{\alpha+\frac{1}{2}}|a|^{-\frac{1}{2}}\left|\psi^2\left(\frac{t-b}{a}\right)\right|\mathrm{d}b\right)\frac{\mathrm{d}a}{a^2}$$
$$\leqslant C\|\psi^2\|_1\int_{|a|\leqslant 1}|a|^{-1+\alpha}\mathrm{d}a$$
$$= C' < +\infty.$$

再对于$|h|\leqslant 1$，估计$\Delta_S(h) = |f_S(t+h)-f_S(t)|$，注意到式(2.47)与(2.45)，得

$$\Delta_S(h) \leqslant \int_{|a|\leqslant|h|}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} C|a|^{\alpha}\left(\left|\psi^2\left(\frac{t-b+h}{a}\right)\right|+\left|\psi^2\left(\frac{t-b}{a}\right)\right|\right)\mathrm{d}b\right]\frac{\mathrm{d}a}{a^2}$$
$$+\int_{|h|\leqslant|a|\leqslant 1}\left(\int_{|t-b|\leqslant|a|A+|h|} C|a|^{\alpha}\left|\frac{h}{a}\right|\mathrm{d}b\right)\frac{\mathrm{d}a}{a^2}$$
$$\leqslant C'\left[\|\psi^2\|_1\int_{|a|\leqslant|h|}|a|^{-1+\alpha}\mathrm{d}a\right.$$
$$\left.+|h|\int_{|h|\leqslant|a|\leqslant 1}|a|^{-3+\alpha}(|a|A+|h|)\mathrm{d}a\right]$$
$$= C''|h|^{\alpha}.$$

由此得到 $f(t)$ 具有指数 α 的 Hölder 连续性. ∎

定理 2.12 与定理 2.13 一起表明，函数的 Hölder 正则性条件基本上可用它的连续小波变换的绝对值按照 α 的衰减特性(2.45)来表征. 但并不完全等价，因为定理 2.13 不包括 $\alpha = 1$ 的情形. 注意，并没有对 $\psi(t)$ 本身作任何正则性要求，除了关于 $\psi(t)$ 的衰减性条件外，只利用了$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\mathrm{d}t = 0$（虽然这个条件没有明显地出现在定理 2.13 中，但 $\psi(t)$ 仍然满足这个等式，否则式(2.44)不能成立).

函数 $f(t)$ 的高阶可微性与它的最高阶导数的 Hölder 连续性可借助于小波系数的衰减类似地刻画(要求 $\psi(t)$ 具有较高阶消失矩)，为了特征 $f(t)\in C^n$ 且 $f^{(n)}(t)$ 具有指数 α 的 Hölder 连续性，要求小波 $\psi(t)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\psi(t)\mathrm{d}t = 0,\quad m = 0,1,\cdots,n.$$

对于这样的小波，若 $\alpha\in(0,1)$，则下述 2 个条件是相互等价的：

(1) $f(t)\in C^n$，且所有 $f^{(m)}(t)$，$m = 0,1,\cdots,n$，有界且平方可积，并且 $f^{(n)}(t)$ 具有指数 α 的 Hölder 连续性；

(2) 不等式$|W_f(a,b)|\leqslant C|a|^{n+\alpha+\frac{1}{2}}$关于 b 是一致的.

这里，也没有要求关于 $\psi(t)$ 的正则性.

下面我们进一步讨论小波变换用于刻画函数的局部正则性.

定理2.14 设小波 $\psi(t)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|t|)|\psi(t)|\mathrm{d}t<+\infty,$$

及$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\mathrm{d}t=0$. 如果一个有界函数 $f(t)$ 在点 t_0 具有指数 $\alpha\in(0,1)$ 的 Hölder 连续性，即式(2.40) 成立，那么

$$|W_f(a,t_0+b)|\leqslant C|a|^{\frac{1}{2}}(|a|^{\alpha}+|b|^{\alpha}). \tag{2.48}$$

证 通过平移能够使 $t_0=0$，故只需证(2.48) 对于 $t_0=0$ 成立即可. 因为$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\mathrm{d}t=0$，所以有

$$\begin{aligned}|W_f(a,b)|&=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)-f(0)|\,|a|^{-\frac{1}{2}}\left|\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right|\mathrm{d}t\\&\leqslant C\int_{-\infty}^{+\infty}|t|^{\alpha}|a|^{-\frac{1}{2}}\left|\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right|\mathrm{d}t\\&\leqslant C|a|^{\alpha+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|y+\frac{b}{a}\right|^{\alpha}|\psi(y)|\mathrm{d}y\\&\leqslant C'|a|^{\frac{1}{2}}(|a|^{\alpha}+|b|^{\alpha}).\end{aligned}$$

■

定理2.15 设$\psi(t)$是紧支撑小波，$f(t)\in L^2(\mathbf{R})$是有界且连续函数. 如果对于某个 $\gamma>0$，不等式

$$|W_f(a,b)|\leqslant C|a|^{\gamma+\frac{1}{2}} \tag{2.49}$$

关于 b 是一致的，并且对于 $\alpha\in(0,1)$，存在常数 $C>0$，使得

$$|W_f(a,t_0+b)|\leqslant C|a|^{\frac{1}{2}}\left(|a|^{\alpha}+\frac{|b|^{\alpha}}{|\log|b||}\right), \tag{2.50}$$

那么，$f(t)$ 在点 t_0 具有指数 α 的 Hölder 连续性.

证 与证明定理 2.13 的思路类似. 把 $f(t)$ 分为两部分 $f_L(t)$ 和 $f_S(t)$，对于 $f_L(t)$ 的一致有界性及$|f_L(t_0+h)-f_L(t_0)|$ 的估计，无需作任何改变. 只是在证明 $f_S(t)$ 的一致有界性时，把 γ 换为 α 即可.

现在估计$|f_S(t_0+h)-f_S(t_0)|$. 因为通过平移能够使 $t_0=0$，所以对于绝对值很小的 h，得

$$\begin{aligned}&|f_S(h)-f_S(0)|\\&\leqslant\int_{|a|\leqslant|h|^{\frac{\alpha}{\gamma}}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|a|^{\gamma}\left|\psi^2\left(\frac{h-b}{a}\right)\right|\mathrm{d}b\right)\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\\&\quad+\int_{|h|^{\frac{\alpha}{\gamma}}\leqslant|a|\leqslant|h|}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left(|a|^{\alpha}+\frac{|b|^{\alpha}}{|\log|b||}\right)\left|\psi^2\left(\frac{h-b}{a}\right)\right|\mathrm{d}b\right]\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\end{aligned}$$

$$+\int_{|a|\leqslant|h|}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left(|a|^{\alpha}+\frac{|b|^{\alpha}}{|\log|b||}\right)\left|\psi^2\left(-\frac{b}{a}\right)\right|\mathrm{d}b\right]\frac{\mathrm{d}a}{a^2}$$

$$+\int_{|h|\leqslant|a|\leqslant 1}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left(|a|^{\alpha}+\frac{|b|^{\alpha}}{|\log|b||}\right)\left|\psi^2\left(\frac{h-b}{a}\right)-\psi^2\left(-\frac{b}{a}\right)\right|\mathrm{d}b\right]\frac{\mathrm{d}a}{a^2},\tag{2.51}$$

其中假定$\alpha>\gamma$(如果$\alpha\leqslant\gamma$，情况也类似)．把式(2.51)右边的四项依次记为T_1,T_2,T_3及T_4，并分别进行估计．这时

$$T_1\leqslant\int_{|a|\leqslant|h|^{\frac{\alpha}{\gamma}}}|a|^{-1+\gamma}\,\|\psi^2\|_1\mathrm{d}a\leqslant C|h|^{\alpha}.$$

在第二项中，利用$\operatorname{supp}\psi^2\subset[-A,A]$，得

$$\begin{aligned}T_2&\leqslant\int_{|a|\leqslant|h|}|a|^{-1+\alpha}\,\|\psi^2\|_1\mathrm{d}a\\&\quad+\int_{|h|^{\frac{\alpha}{\gamma}}\leqslant|a|\leqslant|h|}|a|^{-1}\,\|\psi^2\|_1\frac{(|a|A+|h|)^{\alpha}}{|\log(|a|A+|h|)|}\mathrm{d}a\\&\leqslant C|h|^{\alpha}\left[1+\frac{1}{|\log|h||}\int_{|h|^{\frac{\alpha}{\gamma}}\leqslant|a|\leqslant|h|}|a|^{-1}\mathrm{d}a\right]\\&\leqslant C'|h|^{\alpha}.\end{aligned}$$

类似地，对于充分小的$|h|$，有

$$\begin{aligned}T_3&\leqslant\int_{|a|\leqslant|h|}|a|^{-1+\alpha}\,\|\psi^2\|_1\mathrm{d}a\\&\quad+\int_{|a|\leqslant|h|}|a|^{-1}\,\|\psi^2\|_2\frac{(|a|A)^{\alpha}}{|\log\,|a|A|}\mathrm{d}a\\&\leqslant C|h|^{\alpha}.\end{aligned}$$

最后，有

$$\begin{aligned}T_4&\leqslant C|h|\int_{|h|\leqslant|a|\leqslant 1}|a|^{-3}\left[|a|^{\alpha}+\frac{(|a|A+|h|)^{\alpha}}{|\log(|a|A+|h|)|}\right](|a|A+|h|)\mathrm{d}a\\&\leqslant C'|h|[1+|h|^{-1+\alpha}+|h|(1+|h|^{-2+\alpha})]\\&\leqslant C''|h|^{\alpha}.\end{aligned}$$

综合起来，即证得$f(t)$在点t_0具有指数α的Hölder连续性． ∎

对于高阶局部正则性，也有类似的定理，证明也相仿．这方面的工作还可参考文献[84]．

小波在信号的奇异性检测与分析中的应用将在第八章中讨论．

习 题 2

1. 设 $h(t)$ 是 Haar 尺度函数，$\varphi(t)=h*h(t)$ 是 $h(t)$ 与 $h(t)$ 的卷积，又设 $\psi(t)=\frac{1}{2}\varphi(2t)-\frac{1}{2}\varphi(2t+2)$.

(1) 求函数 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 的解析表示式.

(2) 证明：$\psi(t)$ 满足可允许条件，因而是一个基本小波.

(3) 令 $\psi_{mn}(t)=2^{\frac{m}{2}}\psi(2^m t-n)$. 试问 $\{\psi_{mn}(t)\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$ 能否构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个标准正交基？请阐述理由.

2. 简述 Wavelet 变换主要在哪些方面明显优于 Fourier 变换.

3. 设 $g(t)$ 是一个窗口函数，即 $g(t),tg(t)\in L^2(\mathbf{R})$，证明：

(1) $\sqrt{|t|}g(t)\in L^2(\mathbf{R})$;

(2) $g(t)\in L^1(\mathbf{R})$.

4. 设 $\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 满足可允许条件，且 $\psi(t)$ 及其 Fourier 变换 $\hat{\psi}(\omega)$ 都是窗口函数，证明：$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\mathrm{d}t=0$.

5. 设 $\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 是关于 $t=0$ 对称的基本小波，求 $f(t)=\cos\omega_0 t$ 的连续小波变换.

6. 求 Gauss 函数 $f(t)=\mathrm{e}^{-at^2}$ $(a>0)$ 在时域和频域的窗口宽度，并验证 Heisenberg 不确定性原理.

7. 设 $\varphi(t)$ 是区间$[0,1]$上的特征函数.

(1) 计算 $\varphi(t)$ 与 $\varphi(t)$ 的卷积 $N_2(t)=\varphi*\varphi(t)$.

(2) 计算 $N_2(t)$ 的窗口面积.

8. 设 $\varphi(t)\in L^2(\mathbf{R})$，请用频域形式给出$\{\varphi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 构成 $L^2(\mathbf{R})$ 中的一个标准正交系的充分必要条件，并加以证明.

9. 已知 $\varphi(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 的 Fourier 变换为

$$\hat{\varphi}(\omega)=\frac{\sin^2\frac{\omega}{2}}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2\sqrt{1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{\omega}{2}}}.$$

问$\{\varphi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 能否构成 $L^2(\mathbf{R})$ 中的一个标准正交系？为什么？

10. 证明恒等式：

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}\frac{1}{(\omega+k\pi)^2}=\frac{1}{\sin^2\omega},\quad \forall\omega\in\mathbf{R}.$$

11. 设$\{h_{jk}(t)\}$是 Haar 系，证明：如果函数

$$f(t)=\begin{cases}a, & 0<t<\frac{1}{2},\\ b, & \frac{1}{2}<t<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

那么

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\langle f(t),h_{j0}(t)\rangle h_{j0}(t)=\begin{cases}a, & 0<t<\frac{1}{2},\\ b, & \frac{1}{2}<t<1.\end{cases}$$

12. 设W是由$\varphi(t),h(t),h(2t),h(2t-1)\in L^2[0,1]$张成的子空间，其中$\varphi(t),h(t)$分别是 Haar 函数和 Haar 小波，求函数$f(t)=t$在$W$上的投影.

13. 证明：如果$f(t)$在区间$[a,b]$上具有指数α的 Hölder 连续性，则$f(t)$在任意点$t_0\in[a,b]$处具有指数α的 Hölder 连续性.

14. 设$f(t)=t\sin\frac{1}{t}$，证明：

(1) $f(t)$在任意点$t_0\in[-1,1]$处具有指数 1 的 Hölder 连续性；

(2) 当$\alpha\leqslant\frac{1}{2}$时，$f(t)$在区间$[-1,1]$上具有指数$\alpha$的 Hölder 连续性.

15. 证明：$f(t)$在区间$[a,b]$上具有指数α (>1) 的 Hölder 连续性当且仅当$f'(t)$在$[a,b]$上具有指数$\alpha-1$的 Hölder 连续性.

16. 举例说明，虽然$f'(t)$在点t_0处不具有指数$\alpha-1$的 Hölder 连续性，但是$f(t)$在点t_0处可能具有指数α的 Hölder 连续性.

第三章　多分辨率分析

多分辨率分析(Multi-Resolution Analysis，MRA) 也称为多尺度分析或者多尺度逼近，是 S. Mallat 于 1988 年提出的，既为正交小波的构造提供了切实可行的方法，同时又建立了统一的小波理论框架，对于深刻理解小波分析理论以及构造和应用小波具有重要意义.

3.1　Shannon 定理及其应用

我们知道，从大多数物理设备上获得的信号都是连续依赖于时间的函数 $f(t)$，称之为模拟信号，在利用计算机处理之前需要对 $f(t)$ 进行抽样，转换成数字信号. 所谓抽样，一般是每隔一定的时间间隔 Δ 取 $f(t)$ 的一个函数值 $f(k\Delta)$，$k \in \mathbf{Z}$，这样的一系列离散值称为抽样值，如图 3-1 所示.

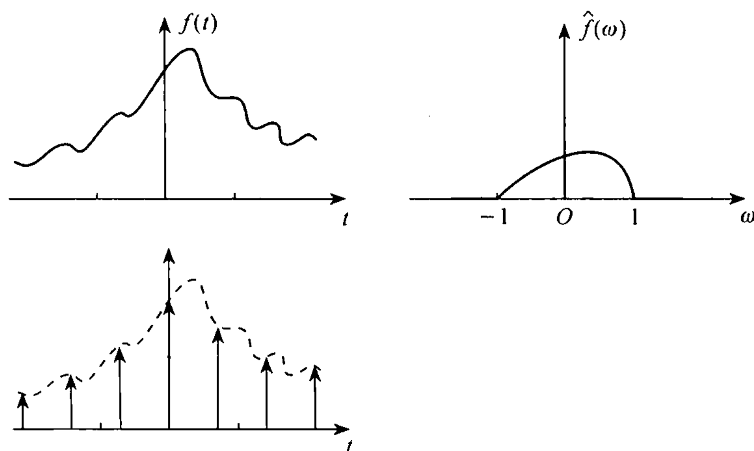


图 3-1

现在的问题是怎样确定抽样间隔 Δ，才能使得仅仅根据抽样值 $\{f(k\Delta)\}_{k\in \mathbf{Z}}$ 就能完全确定原来的信号 $f(t)$? 一般情况下，若对 $f(t)$ 没有任

何限制，这样的间隔Δ当然是不存在的，因为抽样值$\{f(k\Delta)\}_{k\in\mathbf{Z}}$相对于$f(t)$而言已经减少了很多信息. 但若对$f(t)$的Fourier变换$\hat{f}(\omega)$加上一定限制条件，则有著名的Shannon取样定理.

定义 3.1 设$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$是$f(t)$的Fourier变换，若对于正数$B$，当$|\omega|\geqslant B$时，$\hat{f}(\omega)=0$，则称$f(t)$是**频谱$B$有限的.**

如图3-1所示，$f(t)$的Fourier变换$\hat{f}(\omega)$在区间$(-1,1)$外恒为零，所以$f(t)$是一个频谱B有限的，这里的$B=1$.

定理 3.1（Shannon 取样定理） 设函数$f(t)$是频谱B有限的，且取样间隔$\Delta\leqslant\frac{\pi}{B}$，则$f(t)$可由取样值$\{f(k\Delta)\}_{k\in\mathbf{Z}}$唯一确定，且有以下插值公式：

$$f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}f(k\Delta)\frac{\sin\frac{\pi}{\Delta}(t-k\Delta)}{\frac{\pi}{\Delta}(t-k\Delta)}. \tag{3.1}$$

证 因为$B\leqslant\frac{\pi}{\Delta}$，所以$\hat{f}(\omega)$在区间$\left[-\frac{\pi}{\Delta},\frac{\pi}{\Delta}\right]$外恒等于零，记$b=\frac{\pi}{\Delta}$，将$\hat{f}(\omega)$延拓为周期$\frac{2\pi}{\Delta}=2b$的函数$\hat{f}_b(\omega)$，即

$$\hat{f}_b(\omega+2b)=\hat{f}_b(\omega),\quad \omega\in\mathbf{R},$$

且

$$\hat{f}_b(\omega)=\hat{f}(\omega),\quad |\omega|\leqslant b.$$

于是

$$\hat{f}(\omega)=\hat{f}_b(\omega)\chi_{[-b,b]}(\omega). \tag{3.2}$$

将$\hat{f}_b(\omega)$展开成Fourier级数，有

$$\hat{f}_b(\omega)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}C_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\Delta\omega},$$

其中

$$\begin{aligned}C_k&=\frac{1}{2b}\int_{-b}^{b}\hat{f}_b(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta\omega}\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta\omega}\,\mathrm{d}\omega\\&=\Delta\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta\omega}\,\mathrm{d}\omega=\Delta f(k\Delta).\end{aligned}$$

因此有

$$\hat{f}(\omega)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}C_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\Delta\omega}\chi_{[-b,b]}(\omega)=\Delta\sum_{k\in\mathbf{Z}}f(k\Delta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\Delta\omega}\chi_{[-b,b]}(\omega).$$

再利用Fourier逆变换公式，得

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta\sum_{k\in\mathbf{Z}}f(k\Delta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\Delta\omega}\chi_{[-b,b]}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{\Delta}{2\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}}f(k\Delta)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\Delta\omega}\chi_{[-b,b]}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \Delta\sum_{k\in\mathbf{Z}}f(k\Delta)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-k\Delta)\omega}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \Delta\sum_{k\in\mathbf{Z}}f(k\Delta)\,\frac{1}{2\pi\mathrm{i}(t-k\Delta)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-k\Delta)}\Big|_{-b}^{b} \\
&= \sum_{k\in\mathbf{Z}}f(k\Delta)\,\frac{\sin\frac{\pi}{\Delta}(t-k\Delta)}{\frac{\pi}{\Delta}(t-k\Delta)}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

下面，我们运用 Shannon 取样定理来讨论 Hilbert 空间 $L^2(\mathbf{R})$ 的标准正交基问题.

设 $B=\pi$，将频谱 π 有限的函数的全体所成集合记为 V_0，即

$$V_0=\{f(t)\,|\,\hat{f}(\omega)=0,\ |\,\omega\,|\geqslant\pi\}.$$

此时，取样间隔可取 $\Delta=\frac{\pi}{\pi}=1$. 利用 Shannon 定理，对于任一 $f(t)\in V_0$，有

$$f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}f(k)\,\frac{\sin\pi(t-k)}{\pi(t-k)}=\sum_{k\in\mathbf{Z}}f(k)\varphi(t-k), \tag{3.3}$$

其中

$$\varphi(t)=\frac{\sin\pi t}{\pi t}, \tag{3.4}$$

称之为 **Shannon 函数**. 根据第二章例 2.4 可知，函数 $\varphi(t)$ 的整数平移系 $\{\varphi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 构成子空间 V_0 的一个标准正交基.

然而，V_0 仅仅是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个子空间，但我们需要寻求 $L^2(\mathbf{R})$ 的标准正交基. 为此，我们设法逐步扩大所讨论的空间.

设 $B=2\pi$，并取 $\Delta=\frac{1}{2}$，再令

$$V_1=\{f(t)\,|\,\hat{f}(\omega)=0,\ |\,\omega\,|\geqslant 2\pi\}.$$

则 $V_0\subseteq V_1$，且 $\forall f(t)\in V_1$，利用 Shannon 定理，有

$$f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}f\left(\frac{k}{2}\right)\frac{\sin 2\pi\left(t-\frac{k}{2}\right)}{2\pi\left(t-\frac{k}{2}\right)}=\sum_{k\in\mathbf{Z}}f\left(\frac{k}{2}\right)\varphi(2t-k).$$

再由第二章例2.4可知，$\{\sqrt{2}\varphi(2t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$构成子空间$V_1$的一个标准正交基.

一般地，对于任一固定的整数j，设$B=2^j\pi$，取$\Delta=\dfrac{1}{2^j}$，再令

$$V_j=\{f(t)\,\big|\,\hat{f}(\omega)=0,\ |\omega|\geqslant 2^j\pi\},\tag{3.5}$$

则$V_{j-1}\subseteq V_j$，且$\forall f(t)\in V_j$，有

$$f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}f\Big(\frac{k}{2^j}\Big)\frac{\sin 2^j\pi\Big(t-\dfrac{k}{2^j}\Big)}{2^j\pi\Big(t-\dfrac{k}{2^j}\Big)}=\sum_{k\in\mathbf{Z}}f\Big(\frac{k}{2^j}\Big)\varphi(2^jt-k).$$

并且$\{2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^jt-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$构成子空间$V_j$的一个标准正交基.

于是，我们得到了$L^2(\mathbf{R})$中的一个函数$\varphi(t)$及一个闭子空间序列$\{V_j\}$，具有下列5条性质：

(1) $\cdots\subseteq V_{-1}\subseteq V_0\subseteq V_1\subseteq\cdots\subseteq V_j\subseteq\cdots\subseteq L^2(\mathbf{R})$； (3.6)

(2) $f(t)\in V_{j-1}\Leftrightarrow f(2t)\in V_j$；

(3) $\bigcap\limits_{j\in\mathbf{Z}}V_j=\{0\}$； (3.7)

(4) $\overline{\bigcup\limits_{j\in\mathbf{Z}}V_j}=L^2(\mathbf{R})$； (3.8)

(5) $\{\varphi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$构成$V_0$的一个标准正交基.

这里，公式(3.6)，(3.7)的意义是很明显的，对于公式(3.8)可以说得更明确些.

任取$f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，$j\in\mathbf{Z}$，若记$\chi_j(\omega)$为区间$[2^j\pi,2^{j+1}\pi]$上的特征函数，则

$$\hat{f}(\omega)=\sum_{j\in\mathbf{Z}}\hat{f}(\omega)\chi_j(\omega)\triangleq\sum_{j\in\mathbf{Z}}\hat{f}_j(\omega),\tag{3.9}$$

其中，$\hat{f}_j(\omega)$在$[2^j\pi,2^{j+1}\pi]$外恒等于零，故它的 Fourier 逆变换$f_j(t)\in V_j$. 对(3.9)式作 Fourier 逆变换，即得

$$f(t)=\sum_{j\in\mathbf{Z}}f_j(t).\tag{3.10}$$

此即(3.8)式.

因此，若令

$$\varphi_{jk}(t)=2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^jt-k),$$

则根据(3.5)及(3.10)式，$\forall f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，都可由$\{\varphi_{jk}(t)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$表示. 遗憾的是，尽管对于每一个整数$j$，函数系$\{\varphi_{jk}(t)\}_{k\in\mathbf{Z}}$构成$V_j$的标准正交基，但$\{\varphi_{jk}(t)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$并不构成$L^2(\mathbf{R})$的标准正交基. 这是因为，当$j\neq j'$时，子空间$V_j$与$V_{j'}$不正交，故$V_j$中的正交系与$V_{j'}$中的正交系未必相互正交.

解决这一问题的方法是，从子空间列$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$及函数$\varphi(t)$出发，构造另一个相互正交的闭子空间序列$\{W_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$及函数$\psi(t)$，使得空间$L^2(\mathbf{R})$可分解成$\{W_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$的正交和，即

$$L^2(\mathbf{R})=\bigoplus_{j\in\mathbf{Z}}W_j,$$

这里，$W_j\perp W_{j'}\ (j\neq j')$，且由$\psi(t)$的二进伸缩与整数平移所得到的函数系$\{2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jt-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$构成子空间$W_j$的一标准正交基，于是$\{2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jt-k)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$构成$L^2(\mathbf{R})$的标准正交基.

这种构造正交小波基的方法就是所谓的多分辨率分析方法，下面几节我们将详细论述这一方法.

3.2 多分辨率分析

现在，我们首先把上一节中构造的闭子空间列$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$及函数$\varphi(t)$进行抽象和推广，引出多分辨率分析的定义，然后讨论双尺度方程及与之相关的小波滤波器及其性质，最后论述$L^2(\mathbf{R})$的小波子空间的正交分解理论与方法.

3.2.1 多分辨率分析的定义

定义 3.2 Hilbert 空间$L^2(\mathbf{R})$中的一列闭子空间$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$称为一个**正交多分辨率分析**(记为 OMRA)，如果满足

(1) 嵌套性：$V_j\subseteq V_{j+1}\ (j\in\mathbf{Z})$；

(2) 伸缩性：$f(t)\in V_j\Leftrightarrow f(2t)\in V_{j+1}$；

(3) 隔离性：$\bigcap_{j\in\mathbf{Z}}V_j=\{0\}$；

(4) 稠密性：$\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}}V_j}=L^2(\mathbf{R})$；

(5) 正交性：存在$\varphi(t)\in V_0$，使得$\{\varphi(t-k),k\in\mathbf{Z}\}$是$V_0$的标准正交基.

其中的$\varphi(t)$称为该 OMRA 的**尺度函数**，V_j称为$L^2(\mathbf{R})$的**逼近子空间或尺度空间**.

根据这个定义，我们在上一节利用 Shannon 取样定理构造的子空间列$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$就是 Hilbert 空间$L^2(\mathbf{R})$的一个 OMRA.

多分辨率分析为我们提供了在不同尺度下分析函数的一种手段，它对$L^2(\mathbf{R})$的划分如图 3-2 所示.

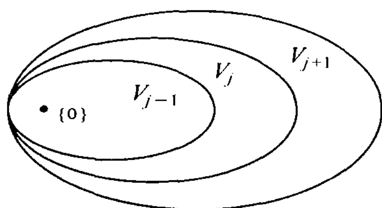


图 3-2

定理3.2 设闭子空间列$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$构成$L^2(\mathbf{R})$的一个OMRA，$\varphi(t)$是相应的尺度函数，则$\forall j\in\mathbf{Z}$，函数系

$$\varphi_{jk}(t)=2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^jt-k),\quad k\in\mathbf{Z}$$

构成子空间V_j的一个标准正交基.

证 首先，$\{\varphi_{jk}(t),k\in\mathbf{Z}\}$是一个标准正交系. 这是因为

$$\begin{aligned}\langle\varphi_{jk},\varphi_{jl}\rangle&=2^j\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(2^jt-k)\overline{\varphi(2^jt-l)}\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t-k)\overline{\varphi(t-l)}\,\mathrm{d}t=\delta_{kl}.\end{aligned}$$

其次，$\forall f(t)\in V_j$，由OMRA的性质(2)知，$f(2^{-j}t)\in V_0$，从而$f(2^{-j}t)$可表示为V_0的基$\{\varphi_{0k}(t),k\in\mathbf{Z}\}$的线性组合，即

$$f(2^{-j}t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k\varphi(t-k),\quad\forall t\in\mathbf{R}.$$

将上式中的t换为2^jt，得

$$f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k\varphi(2^jt-k),\quad\forall t\in\mathbf{R}.$$

故$f(t)$可表示为标准正交系$\{\varphi_{jk}(t),k\in\mathbf{Z}\}$的线性组合.

因此，函数系$\{\varphi_{jk}(t),k\in\mathbf{Z}\}$是$V_j$的一个标准正交基. ∎

多分辨率分析$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$也称为多尺度分析或者多尺度逼近. 根据定理3.2，子空间V_j是由$\varphi(t)$的二进伸缩与整数平移系生成，即

$$V_j=\overline{\mathrm{span}}\{2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^jt-k),k\in\mathbf{Z}\},\quad\forall j\in\mathbf{Z}.\tag{3.11}$$

所以，有时也称$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$是由尺度函数$\varphi(t)$生成的**多分辨率分析**，而称$\varphi(t)$是$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$的**生成元**.

对于尺度函数$\varphi(t)$，不难证明(见文献[161])：

(1) 连续标准化条件

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t\right|=1.\tag{3.12}$$

（2） 离散标准化条件

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}\varphi(t+k)=1. \tag{3.13}$$

我们看到，对于 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个OMRA，要求尺度函数 $\varphi(t)$ 的整数平移系 $\{\varphi(t-k),\ k\in\mathbf{Z}\}$ 构成 V_0 的标准正交基是十分重要的. 实际上，这个条件可以适当放宽，即仅要求 $\{\varphi(t-k),\ k\in\mathbf{Z}\}$ 构成 V_0 的一个Riesz基. 于是有下面的定义.

定义 3.3 Hilbert空间 $L^2(\mathbf{R})$ 中的一列闭子空间 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 称为一个**广义多分辨率分析**(记为GMRA)，如果满足

（1） 嵌套性：$V_j\subseteq V_{j+1}\ (j\in\mathbf{Z})$；

（2） 伸缩性：$f(t)\in V_j\Leftrightarrow f(2t)\in V_{j+1}$；

（3） 隔离性：$\bigcap_{j\in\mathbf{Z}}V_j=\{0\}$；

（4） 稠密性：$\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}}V_j}=L^2(\mathbf{R})$；

（5） Riesz基：存在 $g(t)\in V_0$，使得 $\{g(t-k),\ k\in\mathbf{Z}\}$ 是 V_0 的一个Riesz基.

其中的 $g(t)$ 称为该GMRA的**尺度函数**.

定理3.3 设 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 是由尺度函数 $g(t)$ 生成的GMRA，令

$$\hat{\varphi}(\omega)=\frac{\hat{g}(\omega)}{\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{g}(\omega+2k\pi)|^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.14}$$

则 $\hat{\varphi}(\omega)$ 的Fourier逆变换 $\varphi(t)$ 是一个正交尺度函数，即 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 是由 $\varphi(t)$ 按(3.11)生成的 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个OMRA.

证 我们只需证明：

（Ⅰ） $\{\varphi(t-k),\ k\in\mathbf{Z}\}$ 是 V_0 中的一个标准正交系；

（Ⅱ） $\{\varphi(t-k),\ k\in\mathbf{Z}\}$ 生成的子空间等于 V_0，即

$$\overline{\operatorname{span}}\{\varphi(t-k),\ k\in\mathbf{Z}\}=V_0.$$

先证(Ⅰ). 根据GMRA的第5条性质，$\{g(t-k),\ k\in\mathbf{Z}\}$ 是 V_0 的Riesz基，所以存在正常数 α,β，使得

$$0<\alpha\leqslant\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{g}(\omega+2k\pi)|^2\leqslant\beta<+\infty.$$

令 $\Phi(\omega)=\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{g}(\omega+2k\pi)|^2\right)^{-\frac{1}{2}}$，则(3.14)式即为

$$\hat{\varphi}(\omega)=\Phi(\omega)\hat{g}(\omega). \tag{3.15}$$

显然，$\Phi(\omega)\in C^\infty(\mathbf{R})$ 是一个 2π 周期函数，因此可展开成Fourier级数

$$\Phi(\omega)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega},$$

其中$\{c_k\}_{k\in\mathbf{Z}}\in l^2$. 对(3.15)式作 Fourier 逆变换，得

$$\varphi(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_kg(t-k).$$

可见$\varphi(t)\in V_0\subseteq L^2(\mathbf{R})$. 另一方面，由于

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\Phi(\omega+2k\pi)|^2|\hat{g}(\omega+2k\pi)|^2\\&=\Phi^2(\omega)\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{g}(\omega+2k\pi)|^2=1,\end{aligned}$$

所以$\{\varphi(t-k),\ k\in\mathbf{Z}\}$是$V_0$的一个标准正交系.

再证(Ⅱ). 记$V_0'=\overline{\mathrm{span}}\{\varphi(t-k),\ k\in\mathbf{Z}\}$，即证$V_0'=V_0$.

一方面，由于$\{\varphi(t-k),\ k\in\mathbf{Z}\}\subseteq V_0$，且$V_0$是闭子空间，所以$V_0'\subseteq V_0$. 另一方面，由(3.15)式得$\hat{g}(\omega)=\Phi^{-1}(\omega)\hat{\varphi}(\omega)$，再用完全相同的方法可证得$V_0\subseteq V_0'$. 因此$V_0'=V_0$. ∎

这个定理不仅阐明了 GMRA 与 OMRA 对应的尺度函数$g(t)$与$\varphi(t)$之间的关系，而且具体给出了由$g(t)$到$\varphi(t)$的正交化处理公式. 我们约定，今后如无特别声明，尺度函数一般指正交尺度函数.

3.2.2 双尺度方程与小波滤波器

下面我们介绍在小波分析中起着重要作用的双尺度方程以及与之相关的小波滤波器及其重要性质.

定理3.4 设$\varphi(t)$是$L^2(\mathbf{R})$的一个 OMRA 的尺度函数，则存在$\{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}\in l^2$，使得

$$\varphi(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\varphi(2t-k).\tag{3.16}$$

证 因为$\varphi(t)\in V_0\subseteq V_1$，又根据定理3.2知，$\{2^{\frac{1}{2}}\varphi(2t-k),\ k\in\mathbf{Z}\}$是$V_1$的标准正交基，所以$\varphi(t)$具有(3.16)的表示式，其中

$$h_k=2\langle\varphi(t),\varphi(2t-k)\rangle=2\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,\overline{\varphi(2t-k)}\,\mathrm{d}t.$$

根据 Bessel 不等式，有

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}|h_k|^2=2\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\langle\varphi,\varphi_{1k}\rangle|^2\leqslant 2\|\varphi(t)\|_2^2<+\infty.$$

所以$\{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}\in l^2$. ∎

定义3.4 设$\varphi(t)$是$L^2(\mathbf{R})$的一个 OMRA 的尺度函数，则称满足

(3.16) 式的序列 $\{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 为尺度函数 $\varphi(t)$ 的**双尺度系数**，而称(3.16) 式为**双尺度方程**.

对双尺度方程(3.16) 式的两端求 Fourier 变换，得

$$\hat{\varphi}(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}k\omega}{2}}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)=H\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

其中 $H(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}$. 上式也可写为

$$\hat{\varphi}(2\omega)=H(\omega)\hat{\varphi}(\omega). \tag{3.17}$$

为方便起见，往往把(3.16) 与(3.17) 式分别称为**双尺度方程的时域表示和频域表示**.

定理3.5 设 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 是由尺度函数 $\varphi(t)$ 生成的 OMRA，则双尺度系数 $\{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 具有下列性质：

(1) $$\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_{k-2n}\overline{h_k}=2\delta_{n0},\ \forall n\in\mathbf{Z}; \tag{3.18}$$

(2) $$\sum_{k\in\mathbf{Z}}|h_k|^2=2; \tag{3.19}$$

(3) $$\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k=2; \tag{3.20}$$

(4) $$\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_{2k}=\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_{2k+1}=1. \tag{3.21}$$

证 (1) 利用 $\{\varphi(t-k),k\in\mathbf{Z}\}$ 的标准正交性及双尺度方程(3.16)式，得

$$\begin{aligned}\delta_{n0}&=\langle\varphi(t-n),\varphi(t)\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t-n)\overline{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\varphi(2t-2n-k)\sum_{l\in\mathbf{Z}}\overline{h_l}\,\overline{\varphi(2t-l)}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_{k-2n}\sum_{l\in\mathbf{Z}}\overline{h_l}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t-k)\overline{\varphi(t-l)}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_{k-2n}\overline{h_k},\end{aligned}$$

所以(3.18) 式得证.

(2) 在(3.18) 式中取 $n=0$ 即得(3.19) 式.

(3) 对双尺度方程(3.16) 的两端积分，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t=\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(2t-k)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

利用 $\varphi(t)$ 的标准化条件(3.12) 式，即得(3.20) 式.

(4) 将(3.18) 式两端对 n 求和，得

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_{k-2n}\overline{h_k}=2\sum_{n\in\mathbf{Z}}\delta_{n0}=2.$$

将上式中关于 k 的和式按奇偶分成两部分，有

$$\begin{aligned}2&=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_{2k-2n}\overline{h_{2k}}+\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_{2k+1-2n}\overline{h_{2k+1}}\Big)\\&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_{2k-2n}\Big)\overline{h_{2k}}+\sum_{k\in\mathbf{Z}}\Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_{2k+1-2n}\Big)\overline{h_{2k+1}}\\&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_{2n}\Big)\overline{h_{2k}}+\sum_{k\in\mathbf{Z}}\Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_{2n+1}\Big)\overline{h_{2k+1}}\\&=\Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_{2n}\Big)\sum_{k\in\mathbf{Z}}\overline{h_{2k}}+\Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_{2n+1}\Big)\sum_{k\in\mathbf{Z}}\overline{h_{2k+1}}.\end{aligned}$$

令 $E=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\overline{h_{2k}}$，$O=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\overline{h_{2k+1}}$，则上式即为

$$|E|^2+|O|^2=2.$$

另由(3.20)式，得

$$E+O=2.$$

联立上述二式解得唯一解：$E=O=1$，此即(3.21)式. ∎

定理3.6 设$\{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$是尺度函数 $\varphi(t)$ 的双尺度系数，令

$$H(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}. \tag{3.22}$$

则 $H(\omega)$ 是 2π 周期函数，且

$$|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2\equiv 1. \tag{3.23}$$

证 由(3.22)式，$H(\omega)$ 的 2π 周期性显然，所以只需证(3.23)式成立. 利用尺度函数 $\varphi(t)$ 的平移正交性并根据定理2.6，得

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2\equiv 1,\quad \forall\,\omega\in\mathbf{R},$$

再利用双尺度方程的频域表示(3.17)并按 k 的奇偶性分成两部分，得

$$\begin{aligned}1&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(2\omega+2k\pi)|^2=\sum_{k\in\mathbf{Z}}|H(\omega+k\pi)|^2|\hat{\varphi}(\omega+k\pi)|^2\\&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}|H(\omega+2k\pi)|^2|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2\\&\quad+\sum_{k\in\mathbf{Z}}|H(\omega+(2k+1)\pi)|^2|\hat{\varphi}(\omega+(2k+1)\pi)|^2\\&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}|H(\omega)|^2|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2\\&\quad+\sum_{k\in\mathbf{Z}}|H(\omega+\pi)|^2|\hat{\varphi}(\omega+\pi+2k\pi)|^2\\&=|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2.\end{aligned}$$

∎

现在，令 $g_k = (-1)^k \overline{h_{1-k}}$，$k \in \mathbf{Z}$，及

$$G(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}} g_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}, \tag{3.24}$$

对于 $H(\omega)$ 与 $G(\omega)$，容易证明，下列等式成立：

(1) $G(\omega) = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\overline{H(\omega+\pi)}$，因而具有 2π 周期性； (3.25)

(2) $|G(\omega)|^2 + |G(\omega+\pi)|^2 = 1$； (3.26)

(3) $H(\omega)\overline{G(\omega)} + H(\omega+\pi)\overline{G(\omega+\pi)} = 0.$ (3.27)

在工程应用特别是信号处理中，常把 $\{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 与 $\{g_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 分别称为**低通滤波器系数与高通滤波器系数**，$H(\omega)$ 与 $G(\omega)$ 则是它们的频域表现，分别称为**低通滤波器与高通滤波器**. 事实上，由(3.20)和(3.22)式易知 $H(0)=1$，$G(\pi)=1$. 这正是 $H(\omega)$ 与 $G(\omega)$ 这两个小波滤波器的数学特征. 有的文献称 $H(\omega)$ 或 $G(\omega)$ 为共轭镜像滤波器.

至此，我们在 OMRA 的框架下产生了两个非常重要的函数 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$，它们满足(3.23)，(3.26)及(3.27)式，用矩阵形式表示即

$$M(\omega)\overline{M(\omega)}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I},$$

其中

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} H(\omega) & H(\omega+\pi) \\ G(\omega) & G(\omega+\pi) \end{pmatrix}.$$

还可以等价地表示为

$$\begin{cases} \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} h_{k-2n}\overline{h_k} = 2\delta_{n0}, \\ \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} g_{k-2n}\overline{g}_k = 2\delta_{n0}, & \forall n \in \mathbf{Z}. \\ \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} h_{k-2n}\overline{g}_k = 0, \end{cases}$$

由于这些条件不仅保证了滤波器是共轭正交的，而且还保证了信号分解后能够完全重构，因此公式(3.23)，(3.26)及(3.27)或它们的等价形式称为精确重构条件.

3.2.3 小波子空间与 $L^2(\mathbf{R})$ 的正交分解

下面我们讨论如何从 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 OMRA 出发建立 $L^2(\mathbf{R})$ 的正交分解，为构造正交小波提供理论依据.

首先，我们对这一方法的原理作一粗略分析.

根据定理 3.2，对于固定的 j，函数系 $\{\varphi_{jk}(t),\ k\in\mathbf{Z}\}$ 是 V_j 的一个标准正交基，但由于 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 不是 $L^2(\mathbf{R})$ 的正交分解，所以 $\{\varphi_{jk}(t),\ k\in\mathbf{Z}\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 不

是 $L^2(\mathbf{R})$ 的标准正交基.

为此，我们引入 V_j 在 V_{j+1} 中的正交补空间 W_j，即

$$W_j \perp V_j \quad 且 \quad V_j \oplus W_j = V_{j+1}.$$

对于子空间列 $\{W_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$，我们有：

① $\forall j,j' \in \mathbf{Z}$, $j \neq j'$，子空间 W_j 与 $W_{j'}$ 相互正交，如图 3-3 所示.

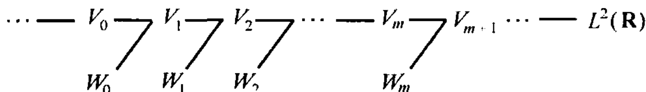


图 3-3

② 因为

$$\begin{aligned} V_{j+1} &= V_j \oplus W_j = (V_{j-1} \oplus W_{j-1}) \oplus W_j = \cdots \\ &= V_s \oplus W_s \oplus W_{s+1} \oplus \cdots \oplus W_j, \end{aligned}$$

所以当 $j \to +\infty$, $s \to -\infty$ 时，即得 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个正交分解

$$L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{j\in\mathbf{Z}} W_j.$$

③ 由 OMRA 的伸缩性易知：$f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j t) \in V_j$，从而有

$$g(t) \in W_0 \Leftrightarrow g(2^j t) \in W_j.$$

这是因为若 $g(t) \in W_0$，则存在 $f(t) \in V_0$，使 $\langle f(t), g(t)\rangle = 0$，即

$$\begin{aligned} 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \overline{g(t)}\, \mathrm{d}t &= 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} f(2^j t)\, \overline{g(2^j t)}\, \mathrm{d}t \\ &= 2^j \langle f(2^j t), g(2^j t)\rangle, \end{aligned}$$

所以 $g(2^j t) \in W_j$，反之亦然.

综上所述，由①,②知，子空间列 $\{W_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个正交分解. 根据③，问题归结为构造一个函数 $\psi(t)$，其整数平移 $\{\psi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 构成子空间 W_0 的标准正交基. 若令

$$\psi_{jk}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k), \quad j,k \in \mathbf{Z}, \tag{3.28}$$

则 $\{\psi_{jk}(t),\ k \in \mathbf{Z}\}$ 构成子空间 W_j 的标准正交基，即

$$W_j = \overline{\mathrm{span}}\{\psi_{jk}(t),\ k \in \mathbf{Z}\}, \quad j \in \mathbf{Z}. \tag{3.29}$$

因此 $\{\psi_{jk}(t),\ j,k \in \mathbf{Z}\}$ 构成 Hilbert 空间 $L^2(\mathbf{R})$ 的标准正交基.

现在的问题是，这样的函数 $\psi(t)$ 是否一定存在？如何构造？下面我们详细阐述这一问题.

定理3.7 对于任一 $f(t) \in W_0$，必存在一个 2π 周期函数 $\nu(\omega)$，使得 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}(\omega)$ 可表示为

$$\hat{f}(\omega)=\nu(\omega)e^{i\frac{\omega}{2}}\overline{H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \tag{3.30}$$

证 因为 $f(t)\in W_0\subset V_1$，所以存在 $\{\alpha_k\}\in l^2$，使

$$f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\alpha_k\varphi(2t-k).$$

对上式两端求 Fourier 变换，得

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\alpha_k e^{-ik\frac{\omega}{2}}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)=A\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \tag{3.31}$$

其中 $A(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\alpha_k e^{-ik\omega}\in L^2[0,2\pi]$.

注意到 $W_0\perp V_0$，所以 $f(t)\perp\varphi(t-n)$，$\forall n\in\mathbf{Z}$. 故

$$\begin{aligned}0=\langle f(t),\varphi(t-n)\rangle&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\overline{\hat{\varphi}(\omega)}e^{in\omega}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}\hat{f}(\omega)\overline{\hat{\varphi}(\omega)}e^{in\omega}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{in\omega}\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}}\hat{f}(\omega+2k\pi)\overline{\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)}\right)d\omega.\end{aligned}$$

于是有

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}\hat{f}(\omega+2k\pi)\overline{\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)}=0. \tag{3.32}$$

把(3.17),(3.31)代入上式，并利用 $A(\omega),H(\omega)$ 的 2π 周期性以及定理 2.6，可知(3.32)式成立当且仅当

$$A(\omega)\overline{H(\omega)}+A(\omega+\pi)\overline{H(\omega+\pi)}=0. \tag{3.33}$$

这就是说，$\forall\omega\in\mathbf{R}$，向量 $(A(\omega),-A(\omega+\pi))$ 与 $(\overline{H(\omega+\pi)},\overline{H(\omega)})$ 是线性相关的，故存在 $\lambda(\omega)$，使得

$$\begin{cases}A(\omega)=\lambda(\omega)\overline{H(\omega+\pi)},\\A(\omega+\pi)=-\lambda(\omega)\overline{H(\omega)}.\end{cases} \tag{3.34}$$

由此可得

$$\lambda(\omega)+\lambda(\omega+\pi)=0.$$

由于 $A(\omega),H(\omega)\in L^2[0,2\pi]$，所以 $\lambda(\omega)\in L^2[0,2\pi]$. 故由第一章例 1.28 知，存在 $\nu(\omega)\in L^2[0,2\pi]$，使得

$$\lambda(\omega)=e^{i\omega}\nu(2\omega). \tag{3.35}$$

把(3.35)与(3.34)的第一式代入(3.31)即得(3.30)式. ■

现在，假设 $\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 就是我们要找的函数，则 $\{\psi(t-k),k\in\mathbf{Z}\}$ 构成 W_0 的标准正交基，那么 $\forall f(t)\in W_0$，有

$$f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\beta_k\psi(t-k),$$

其中$\{\beta_k\}\in l^2$. 对上式两端求 Fourier 变换，得

$$\hat{f}(\omega)=\Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}}\beta_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}\Big)\hat{\psi}(\omega),\tag{3.36}$$

其中$\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}\beta_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}\in L^2[0,2\pi]$. 比较(3.36)与(3.30)式，可以选取

$$\hat{\psi}(\omega)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}\,\overline{H\Big(\frac{\omega}{2}+\pi\Big)}\hat{\varphi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big).$$

把(3.22)式代入上式，再作 Fourier 逆变换，得

$$\psi(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}(-1)^{k-1}\,\overline{h_{-k-1}}\varphi(2t-k).$$

值得注意的是，$\hat{\psi}(\omega)$的选取并不是唯一的，因而$\psi(t)$不是唯一的. 事实上，由定理 2.7 可知：如果$\{\psi_1(t-k),\ k\in\mathbf{Z}\}$与$\{\psi_2(t-k),\ k\in\mathbf{Z}\}$都构成$W_0$的标准正交基，那么必存在$2\pi$周期函数$\rho(\omega)$，且$|\rho(\omega)|=1$，使得$\psi_1(t)$与$\psi_2(t)$的 Fourier 变换$\hat{\psi}_1(\omega),\hat{\psi}_2(\omega)$满足

$$\hat{\psi}_1(\omega)=\rho(\omega)\hat{\psi}_2(\omega).$$

因此，我们取(今后如无特别声明就总这样选取)

$$\hat{\psi}(\omega)=-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}\,\overline{H\Big(\frac{\omega}{2}+\pi\Big)}\hat{\varphi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big),\tag{3.37}$$

相应的 Fourier 逆变换为

$$\psi(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}(-1)^k\,\overline{h_{1-k}}\varphi(2t-k).\tag{3.38}$$

定理3.8 设$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$是$L^2(\mathbf{R})$的一个OMRA，$\{h_k\}$是尺度函数$\varphi(t)$的双尺度系数，$\psi(t)$由(3.38)式给出，则由(3.28)定义的二进伸缩与整数平移系$\{\psi_{jk}(t)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$构成$L^2(\mathbf{R})$的一个标准正交基.

证 我们只需证明：

(Ⅰ) $\{\psi_{0k}(t)\}_{k\in\mathbf{Z}}$即$\{\psi(t-k),\ k\in\mathbf{Z}\}$是一个标准正交系；

(Ⅱ) $W_0\perp V_0$；

(Ⅲ) $V_1=W_0\oplus V_0$；

(Ⅳ) $\{\psi_{jk}(t)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$是$L^2(\mathbf{R})$中的一个完备正交系.

先证(Ⅰ). 首先根据(3.25)式把(3.37)式改写为

$$\hat{\psi}(\omega)=G\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\hat{\varphi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big),\tag{3.39}$$

其中$G(\omega)=\frac{1}{2}\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}g_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}$，而$g_k=(-1)^k\,\overline{h_{1-k}}$. 由于

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(\omega+2k\pi)|^2=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left|G\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)\right|^2\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)\right|^2,$$

把上式右端的和式按 k 的奇偶性分成两部分，并注意到 $G(\omega)$ 的 2π 周期性，得

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(\omega+2k\pi)|^2&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left|G\left(\frac{\omega}{2}+2k\pi\right)\right|^2\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+2k\pi\right)\right|^2\\&\quad+\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left|G\left(\frac{\omega}{2}+(2k+1)\pi\right)\right|^2\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+(2k+1)\pi\right)\right|^2\\&=\left|G\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2+\left|G\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right|^2\\&=1.\end{aligned}$$

故由定理 2.6 知，$\{\psi(t-k),\ k\in\mathbf{Z}\}$ 是标准正交系.

再证(Ⅱ)：$W_0\perp V_0$.

因为 V_0 由 $\{\varphi(t-k),\ k\in\mathbf{Z}\}$ 张成，W_0 由 $\{\psi(t-k),\ k\in\mathbf{Z}\}$ 张成，所以要证 $W_0\perp V_0$，只需证

$$\langle\varphi(t-k),\psi(t-l)\rangle=0,\quad\forall k,l\in\mathbf{Z}$$

即可. 利用 Parseval 等式及(3.27)式，有

$$\begin{aligned}&\langle\varphi(t-k),\psi(t-l)\rangle\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t-k)\,\overline{\psi(t-l)}\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u+m)\,\overline{\psi(u)}\mathrm{d}u=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}(\omega)\,\overline{\hat{\psi}(\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\omega}\,\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{G\left(\frac{\omega}{2}\right)}\,\overline{\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\omega}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2H\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{G\left(\frac{\omega}{2}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\omega}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2H\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{G\left(\frac{\omega}{2}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\omega}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\int_{0}^{2\pi}\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)\right|^2H\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)\overline{G\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\omega}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)\right|^2H\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)\overline{G\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\omega}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}H\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{G\left(\frac{\omega}{2}\right)}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+2k\pi\right)\right|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\omega}\mathrm{d}\omega\\&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\overline{G\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+(2k+1)\pi\right)\right|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\omega}\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(H\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{G\left(\frac{\omega}{2}\right)} + H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\overline{G\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\right)e^{im\omega}d\omega$$
$$= 0.$$

这就证明了 $W_0 \perp V_0$.

再证(Ⅲ)：$V_1 = V_0 \oplus W_0$，这只需证 $V_1 \subseteq V_0 \oplus W_0$. 为此，令

$$H_e(\omega) = \frac{1}{2}\left(H\left(\frac{\omega}{2}\right)+H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right),$$

$$H_o(\omega) = \frac{1}{2}\left(H\left(\frac{\omega}{2}\right)-H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right)e^{i\frac{\omega}{2}}.$$

易知

$$H_e(\omega+2\pi) = H_e(\omega), \quad H_o(\omega+2\pi) = H_o(\omega),$$

且

$$H_e(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_{2k}e^{-ik\omega}, \quad H_o(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_{2k+1}e^{-ik\omega}.$$

于是

$$\overline{H_e(\omega)}\hat{\varphi}(\omega) + H_o(\omega)\hat{\psi}(\omega)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\overline{H\left(\frac{\omega}{2}\right)} + \overline{H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\right)H\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(H\left(\frac{\omega}{2}\right)-H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right)\overline{H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left|H\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2 + H\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\left|H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right|^2 - H\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

对上式两端作 Fourier 逆变换，得

$$\varphi(2t) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left(\overline{h_{2k}}\varphi(t+k) + h_{2k+1}\psi(t-k)\right). \tag{3.40}$$

同理，可得

$$\overline{H_o(\omega)}\hat{\varphi}(\omega) - H_e(\omega)\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\omega}{2}}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

再作 Fourier 逆变换，得

$$\varphi(2t-1) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left(\overline{h_{2k+1}}\varphi(t+k) - h_{2k}\psi(t-k)\right). \tag{3.41}$$

任取 $f(t) \in V_1$，则存在 $\{c_k\}_{k\in\mathbf{Z}} \in l^2$，使

$$f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k\varphi(2t-k).$$

把上述和式分为奇偶两部分，并把(3.40)和(3.41)式代入相应部分，得

$$\begin{aligned}f(t)&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{2k}\varphi(2t-2k)+\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{2k+1}\varphi(2t-2k-1)\\&=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{2k}\sum_{l\in\mathbf{Z}}\left(\overline{h_{2l}}\varphi(t-k+l)+h_{2l+1}\psi(t-k-l)\right)\\&\quad+\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{2k+1}\sum_{l\in\mathbf{Z}}\left(\overline{h_{2l+1}}\varphi(t-k+l)-h_{2l}\psi(t-k-l)\right)\\&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_k\varphi(t-k)+\sum_{k\in\mathbf{Z}}b_k\psi(t-k),\end{aligned}$$

其中

$$a_k=\frac{1}{2}\sum_{l\in\mathbf{Z}}(c_{2k+2l}\overline{h_{2l}}+c_{2k+2l+1}\overline{h_{2l+1}}),$$

$$b_k=\frac{1}{2}\sum_{l\in\mathbf{Z}}(c_{2k-2l}h_{2l+1}-c_{2k-2l+1}h_{2l}).$$

可见 $f(t)\in V_0\oplus W_0$，所以 $V_1\subseteq V_0\oplus W_0$. 这就证明了 $V_1=V_0\oplus W_0$.

最后证明(Ⅳ). 首先由(Ⅰ)知，对任一固定的 $j\in\mathbf{Z}$，$\{\psi_{jk}(t),k\in\mathbf{Z}\}$ 是 W_j 的一个标准正交基.

然后我们构造由 $L^2(\mathbf{R})$ 到 V_j 的正交投影算子：

$$P_jf(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\langle f,\varphi_{jk}\rangle\varphi_{jk}(t),\quad\forall f(t)\in L^2(\mathbf{R}),\tag{3.42}$$

以及由 $L^2(\mathbf{R})$ 到 W_j 的正交投影算子：

$$Q_jf(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\langle f,\psi_{jk}\rangle\psi_{jk}(t),\quad\forall f(t)\in L^2(\mathbf{R}).\tag{3.43}$$

分别称 P_j 与 Q_j 为**逼近算子与细节算子**. 易知，

$$Q_j=P_{j+1}-P_j,$$

且也有与定理 2.9 相同的命题(见文献[161])，即

设 $f(t)\in C_c^0(\mathbf{R})$，则

(1) $\lim\limits_{j\to+\infty}\|P_jf-f\|_2=0$;

(2) $\lim\limits_{j\to-\infty}\|P_jf\|_2=0$.

利用这一事实，几乎是重复定理 2.10 的证明过程即可证得 $\{\psi_{jk}(t)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 中的一个完备正交系. ∎

需要指出的是，对于由(3.38)式定义的函数 $\psi(t)$，容易证明：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

进一步，根据$\{\psi_{jk}(t)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$是$L^2(\mathbf{R})$的标准正交基还可证明$\psi(t)$满足基本小波的可允许性条件(2.1)式(详见文献[49])，因此$\psi(t)$是正交小波. 有时，我们称W_j为**小波子空间或细节空间**.

3.3 正交小波的构造

利用多分辨率分析构造正交小波，具有统一的理论框架和可行的计算方法. 下面我们先讨论如何选取尺度函数才能构造出一个多分辨率分析，然后列举几个典型例子说明构造正交小波的具体算法.

3.3.1 从尺度函数到多分辨率分析

我们知道，多分辨率分析是由尺度函数生成的，那么如何选取尺度函数呢?下面我们就来讨论这一问题.

设$\varphi(t)\in L^2(\mathbf{R})$，其二进伸缩与整数平移张成的子空间列记为

$$V_j=\overline{\operatorname{span}}\{2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^jt-k),\ k\in\mathbf{Z}\},\quad j\in\mathbf{Z}. \tag{3.44}$$

定理3.9 设$\varphi(t)\in L^2(\mathbf{R})$是一个具有紧支集的连续函数，且满足正交性条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t-k)\,\overline{\varphi(t-l)}\,\mathrm{d}t=\delta_{kl},\quad \forall k,l\in\mathbf{Z}, \tag{3.45}$$

则由$\varphi(t)$生成的子空间列(3.44)满足隔离性条件，即$\bigcap_{j\in\mathbf{Z}}V_j=\{0\}$.

证 $\forall f(t)\in V_0$，因为$\{\varphi(t-k),\ k\in\mathbf{Z}\}$是$V_0$的标准正交基，所以

$$f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k\varphi(t-k),$$

其中$c_k=\langle f(t),\varphi(t-k)\rangle$. 注意到

$$\begin{aligned}f(t)&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\langle f(\cdot),\varphi(\cdot-k)\rangle\varphi(t-k)\\&=\langle f(\cdot),\sum_{k\in\mathbf{Z}}\varphi(t-k)\varphi(\cdot-k)\rangle,\end{aligned}$$

利用Cauchy-Schwarz不等式，可得

$$\begin{aligned}|f(t)|&\leqslant\|f\|_2\Big\|\sum_{k\in\mathbf{Z}}\varphi(t-k)\varphi(\cdot-k)\Big\|_2\\&=\|f\|_2\Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\varphi(t-k)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

因为$\varphi(t)$具有紧支集，所以上述和式中仅有有限项，故存在常数$C>0$，使得

$$\max_{t\in\mathbf{R}}|f(t)|\leqslant C\|f\|_2,\quad \forall f(t)\in V_0.$$

现任取 $f(t)\in\bigcap_{j\in\mathbf{Z}}V_j$，则 $\forall j\in\mathbf{Z}^+$，有 $f(t)\in V_{-j}\subseteq V_0$，从而

$$|f(2^jt)|\leqslant C\|f(2^jt)\|_2=2^{-\frac{j}{2}}C\|f\|_2,$$

$$\max_{t\in\mathbf{R}}|f(t)|\leqslant C\,2^{-\frac{j}{2}}\|f\|_2.$$

令 $j\to+\infty$，则由上式可知，$f(t)\equiv 0$，因此 $\bigcap_{j\in\mathbf{Z}}V_j=\{0\}$. ∎

定理3.10 设 $\varphi(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 是一个具有紧支集的连续函数并且满足正交性条件(3.45)式以及标准化条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t=1,\tag{3.46}$$

则由 $\varphi(t)$ 生成的子空间列(3.44)满足稠密性条件，即 $\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}}V_j}=L^2(\mathbf{R})$.

证 即证：当 $j\to+\infty$ 时，$V_j\to L^2(\mathbf{R})$. 利用由 $L^2(\mathbf{R})$ 到 V_j 的正交投影算子 P_j：

$$P_jf(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\langle f,\varphi_{jk}\rangle\varphi_{jk}(t),\quad \forall f(t)\in L^2(\mathbf{R}).$$

我们只需证 $P_jf(t)\to f(t)\ (j\to+\infty)$，而这又只需证

$$\lim_{j\to+\infty}\|P_jf\|_2=\|f\|_2.\tag{3.47}$$

整个证明过程分三步实现.

第一步，证明(3.47)式对任意形如下式的特征函数成立：

$$u(t)=\begin{cases}1, & a\leqslant t\leqslant b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 a,b 为任意常数，且 $a<b$.

根据逼近算子 P_j 的定义，有

$$P_ju(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left(\int_a^b\overline{\varphi_{jk}(x)}\,\mathrm{d}x\right)\varphi_{jk}(t),$$

因此，有

$$\begin{aligned}\|P_ju\|_2^2=\langle P_ju,P_ju\rangle&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left|\int_a^b\varphi_{jk}(t)\mathrm{d}t\right|^2\\&=2^{-j}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left|\int_{2^ja}^{2^jb}\varphi(t-k)\mathrm{d}t\right|^2.\end{aligned}$$

当 j 充分大时，上式右端的积分区间 $[2^ja,2^jb]$ 的长度远远大于 $\varphi(t)$ 的支集 $[-A,A]$ 的长度，并且上述和式中的积分可以分成三类：一是 $\varphi(t-k)$ 的支集位于积分区间之外，因而积分为零；二是 $\varphi(t-k)$ 的支集包含积分区间的

端点，这一部分个数较少，不超过 $4A$；三是 $\varphi(t-k)$ 的支集位于积分区间之内，这类积分大约有 $2^j(b-a)$ 个. 由条件$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t=1$，所以

$$\|P_ju\|_2^2=2^{-j}2^j(b-a)+O(2^{-j})=\|u\|_2^2+O(2^{-j}).$$

因此，(3.47) 式对任意特征函数 $u(t)$ 成立.

第二步，证明(3.47) 式对任意形如下式的阶梯函数成立：

$$g(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_ku_k(t),$$

其中 $a_k\in\mathbf{R}$，并且只有有限个 $a_k\neq 0$，而 $u_k(t)$ 是任意特征函数.

事实上，因为

$$\begin{aligned}\|P_jg-g\|_2&=\Big\|\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_k(P_ju_k-u_k)\Big\|_2\\&\leqslant\sum_{k\in\mathbf{Z}}|a_k|\,\|P_ju_k-u_k\|_2,\end{aligned}$$

且当 $j\to+\infty$ 时，$\|P_ju_k-u_k\|_2\to 0$，所以$\|P_jg-g\|_2\to 0$. 注意到 P_j 是正交投影算子，因而有

$$\|g\|_2^2=\|P_jg\|_2^2+\|P_jg-g\|_2^2.$$

于是有$\lim\limits_{j\to+\infty}\|P_jg\|_2=\|g\|_2$.

第三步，证明(3.47) 式对任意 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 成立.

由于任意$f(t)\in L^2(\mathbf{R})$都可以用一个阶梯函数逼近，所以 $\forall\varepsilon>0$，可选取一个阶梯函数 $g(t)$，使得$\|f-g\|_2<\frac{\varepsilon}{3}$. 而正交投影算子不增加范数，故有$\|P_j(f-g)\|_2<\frac{\varepsilon}{3}$. 再由第二步的结论，当 j 充分大时，有$\|P_jg-g\|_2<\frac{\varepsilon}{3}$. 于是有

$$\begin{aligned}\|f-P_jf\|_2&=\|(f-g)+(g-P_jg)+P_j(g-f)\|_2\\&\leqslant\|f-g\|_2+\|g-P_jg\|_2+\|P_j(g-f)\|_2\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证得：当 $j\to+\infty$ 时，$V_j\to L^2(\mathbf{R})$. ∎

定理3.11 设 $\varphi(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 是一个具有紧支集的连续函数，其 Fourier 变换 $\hat{\varphi}(\omega)$ 满足：

(Ⅰ) $\hat{\varphi}(\omega)\neq 0$，且 $\hat{\varphi}(0)=1$；

(Ⅱ) $\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2\equiv 1$；

(Ⅲ) $\dfrac{\hat{\varphi}(2\omega)}{\hat{\varphi}(\omega)}$ 是 2π 周期平方可积函数.

则由 $\varphi(t)$ 生成的闭子空间列(3.44)构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 OMRA.

证 我们逐一证明定义 3.2 中的 5 条性质成立.

(1) 显然只要证 $V_0 \subseteq V_1$ 即可. 令 $H(\omega)=\dfrac{\hat{\varphi}(2\omega)}{\hat{\varphi}(\omega)}$, 则由条件(Ⅲ)可知, $H(\omega)$ 是 2π 周期平方可积函数, 故可展开为 Fourier 级数

$$H(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega},$$

因此, 有 $\hat{\varphi}(2\omega)=\frac{1}{2}\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}c_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}\hat{\varphi}(\omega)$, 亦即

$$\hat{\varphi}(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{\omega}{2}}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

作 Fourier 逆变换, 可得

$$\varphi(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k\varphi(2t-k).$$

由于 $\{2^{\frac{1}{2}}\varphi(2t-k),\ k\in\mathbf{Z}\}$ 是子空间 V_1 的标准正交基, 所以 $\varphi(t)\in V_1$. 这就证得 $V_0\subseteq V_1$.

(2) 显然有 $f(t)\in V_j \Leftrightarrow f(2t)\in V_{j+1}$, $\forall k\in\mathbf{Z}$.

(3) 由定理 2.6 可知, 条件(Ⅱ)等价于正交性条件(3.45)式, 所以由定理 3.9 知, $\bigcap\limits_{j\in\mathbf{Z}}V_j=\{0\}$.

(4) 定理 3.10 已证.

(5) 根据条件(Ⅱ)及定理 2.6 即知 $\{\varphi(t-k),\ k\in\mathbf{Z}\}$ 是 V_0 的标准正交基.

因此, $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 OMRA. ∎

需要指出的是, 定理 3.11 中的条件"函数 $\varphi(t)$ 具有紧支集并且连续"并不是必要的, 改为较弱的条件"$\varphi(t)$ 的 Fourier 变换 $\hat{\varphi}(\omega)$ 连续有界", 结论仍成立, 其证明需要用到 Lebesgue 控制收敛定理等实分析工具, 读者可参阅文献[198]第 29 ~ 34 页.

3.3.2 几个典型的正交小波

迄今关于多分辨率分析已经建立起了一系列重要理论, 这些理论既阐明了尺度函数与小波函数的重要特性及其相互之间的关系, 也为我们提供了一个切实可行的构造正交小波的方法. 归纳起来, 大致有以下几个主要步骤:

(1) 选取尺度函数 $\varphi(t)$, 使 $\{\varphi(t-k),\ k\in\mathbf{Z}\}$ 是一个标准正交系.

（2） 求出双尺度系数列$\{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$. 这时，可利用的公式有：

① 双尺度方程时域表示式 $\varphi(t)=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}h_k\varphi(2t-k)$；

② 双尺度方程频域表示式 $\hat{\varphi}(2\omega)=H(\omega)\hat{\varphi}(\omega)$；

③ 低通滤波器 $H(\omega)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}h_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}$.

（3） 再由双尺度系数$\{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$及(3.38)式即可构造出正交小波

$$\psi(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}(-1)^k\overline{h_{1-k}}\varphi(2t-k).$$

例 3.1 Haar 小波 这里，取

$$\varphi(t)=\chi_{[0,1]}(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

则

（1） $\hat{\varphi}(\omega)=\dfrac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}$，$\hat{\varphi}(0)=1$，$|\hat{\varphi}(\omega)|\leqslant 1$.

（2） 利用第二章的恒等式(2.28)，有

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2=\left|\sin\frac{\omega}{2}\right|^2\sum_{k\in\mathbf{Z}}\frac{1}{\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)^2}=1.$$

（3） $$H(\omega)=\frac{\hat{\varphi}(2\omega)}{\hat{\varphi}(\omega)}=\frac{\sin\omega}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\Bigg/\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}\right)=\frac{1}{2}\frac{\sin\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}).$$

显然，$H(\omega+2\pi)=H(\omega)$. 故 $\varphi(t)$ 满足定理 3.11 中的条件.

根据 $H(\omega)$ 的定义(3.22)式，得双尺度系数$\{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$：

$$h_0=1,\quad h_1=1,\quad h_k=0\ (k\neq 0,1,\ k\in\mathbf{Z}).$$

由此得双尺度方程

$$\varphi(t)=\varphi(2t)+\varphi(2t-1).$$

利用公式(3.38)即得正交小波

$$\psi(t)=\varphi(2t)-\varphi(2t-1)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<\frac{1}{2},\\ -1, & \frac{1}{2}\leqslant t<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

这就是我们在第二章已讨论过的 Haar 小波 $h(t)$.

例 3.2 Shannon 小波 这里，取 $\varphi(t)=\dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$. 易知

$$\hat{\varphi}(\omega)=\chi_{[0,1]}(t)=\begin{cases}1, & |\omega|<\pi, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

显然，

$$\hat{\varphi}(0)=1, \quad |\hat{\varphi}(\omega)|\leqslant 1, \quad \sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2=1,$$

但$\dfrac{\hat{\varphi}(2\omega)}{\hat{\varphi}(\omega)}$ 的 2π 周期性即定理 3.11 中的条件(Ⅲ) 不成立.

下面，我们利用 Shannon 取样定理来确定双尺度系数. 由

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\varphi(2t-k)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\varphi\left(\frac{k}{2}\right)\varphi(2t-k)\\&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{\frac{k\pi}{2}}\varphi(2t-k)\\&=\varphi(2t)+\sum_{k\in\mathbf{Z}}\frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi}\varphi(2t-2k-1),\end{aligned}\tag{3.48}$$

可知

$$\begin{cases}h_0=1, \\ h_{2k}=0 \quad (k\neq 0), \\ h_{2k+1}=\dfrac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi}.\end{cases}$$

相应的正交小波为

$$\begin{aligned}\psi(t)&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}(-1)^k\,\overline{h_{1-k}}\varphi(2t-k)\\&=-h_0\varphi(2t-1)+\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_{2k+1}\varphi(2t+2k)\\&=-\varphi(2t-1)+\sum_{k\in\mathbf{Z}}\frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi}\varphi(2t+2k).\end{aligned}\tag{3.49}$$

为了求得(3.49) 中的和式，将(3.48) 式中的 t 取为 $t-\dfrac{1}{2}$，得

$$\varphi\left(t-\frac{1}{2}\right)=\varphi(2t-1)+\sum_{k\in\mathbf{Z}}\frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi}\varphi(2t-2k-2).$$

令 $l=-(k+1)$，则上式为

$$\varphi\left(t-\frac{1}{2}\right)-\varphi(2t-1)=\sum_{l\in\mathbf{Z}}\frac{2(-1)^l}{(2l+1)\pi}\varphi(2t+2l),$$

代入(3.49)式，得

$$\psi(t) = \varphi\left(t-\frac{1}{2}\right) - 2\varphi(2t-1)$$
$$= \frac{\sin \pi\left(t-\frac{1}{2}\right) - \sin 2\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)}. \tag{3.50}$$

函数(3.50)称为**Shannon小波**. $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 的图形分别见图3-4 (a)和图3-4 (b).

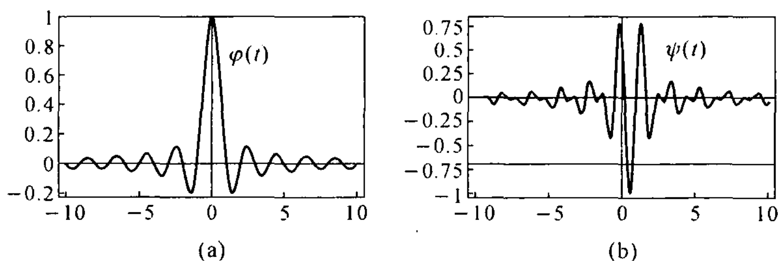


图 3-4

显然，Shannon 小波是无限次可微的，因而其光滑性比 Haar 小波要优越得多. 但 Shannon 小波不仅非支集紧，而且当 $|t| \to \infty$ 时，趋于零的速度仅为 $O\left(\frac{1}{|t|}\right)$，即局部性很差，将函数用 Shannon 小波基展开时，每一项都不能很好地反映该函数的局部性质，故 Shannon 小波用处也不大. 我们希望构作的正交小波基，不仅要充分光滑，而且有较好的局部性(支集紧或以较快的速度衰减到零).

例 3.3 Franklin 小波 我们知道，Haar 小波的缺陷是不连续. 利用作卷积的方法可以使之光滑化，因为卷积运算经 Fourier 变换变为简单的乘法运算，所以用这种方法容易求得光滑化的函数的 Fourier 变换. 令

$$N_1(t) = \chi_{[0,1]}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$N_2(t) = N_1 * N_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} N_1(u) N_1(t-u) \mathrm{d}u$$

$$= \int_0^1 N_1(t-u) \mathrm{d}u = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t < 1, \\ 2-t, & 1 \leqslant t < 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$N_3(t) = N_2 * N_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} N_1(u) N_2(t-u) \mathrm{d}u$$

$$= \int_0^1 N_1(t-u)\mathrm{d}u = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & 0 \leqslant t < 1, \\ \frac{3}{4} - \left(t - \frac{3}{2}\right)^2, & 1 \leqslant t < 2, \\ \frac{1}{2}(3-t)^2, & 2 \leqslant t < 3, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$\cdots,$

$$N_m(t) = N_{m-1} * N_1(t) = \int_0^1 N_{m-1}(t-u)\mathrm{d}u = \int_{t-1}^t N_{m-1}(u)\mathrm{d}u,$$

$\cdots.$

易知，函数 $N_2(t)$ 连续，但导数不连续；$N_3(t)$ 的一阶导数连续，但二阶导数不连续；一般地，可用归纳法证明：$N_m(t)$ 具有 $m-2$ 阶连续导数，但其 $m-1$ 阶导数不连续.

可见，随着 m 增大，相应的 $N_m(t)$ 就愈来愈光滑，因此可以根据具体的需要来选择适当的 m. 当然，随着 m 的增大，$N_m(t)$ 的窗口宽度也随之增加，因而其局部性变差，如图 3-5 所示. 这是 $N_m(t)$ 的弱点.

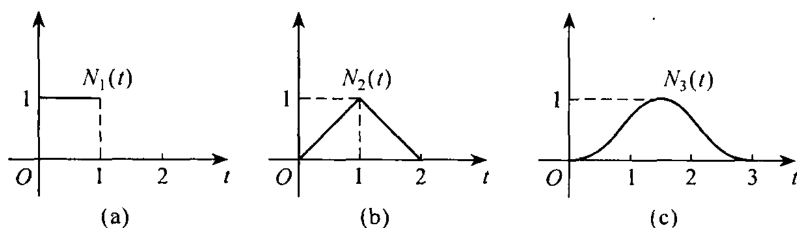


图 3-5

下面，以 $m=2$ 为例来说明由 $N_m(t)$ 构造正交小波的方法. 对于一般的 m，处理方法完全类似，详见本章 3.5 节.

若直接取 $\varphi(t) = N_2(t)$，则有双尺度方程

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\varphi(2t+1) + \varphi(2t) + \frac{1}{2}\varphi(2t-1),$$

但定理 3.11 中的条件(Ⅱ)不成立. 这是因为由

$$\hat{N}_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} N_1(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\mathrm{d}t = \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{\mathrm{i}\omega},$$

$$\hat{N}_2(\omega) = \widehat{N_1 * N_1}(\omega) = [\hat{N}_1(\omega)]^2$$
$$= \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{\mathrm{i}\omega}\right)^2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\left(\sin\frac{\omega}{2} \Big/ \frac{\omega}{2}\right)^2,$$

可得

$$\Phi(\omega)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{N}_2(\omega+2k\pi)|^2=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left|\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)}{\frac{\omega}{2}+k\pi}\right|^4$$

$$=\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^4\sum_{k\in\mathbf{Z}}\frac{1}{\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)^4}\quad（利用恒等式(2.29)）$$

$$=\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^4\left[\frac{1}{\sin^4\frac{\omega}{2}}-\frac{2}{3}\frac{1}{\sin^2\frac{\omega}{2}}\right]$$

$$=1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{\omega}{2}\neq 1.$$

因此，还需将 $\hat{N}_2(\omega)$ 规范化，令

$$\hat{\varphi}(\omega)=\frac{\hat{N}_2(\omega)}{\sqrt{\Phi(\omega)}}=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\left(\sin\frac{\omega}{2}\Big/\frac{\omega}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

再由 Fourier 逆变换即可求得相应的 $\varphi(t)$.

显然，$\hat{\varphi}(\omega)$ 满足定理 3.11 中的条件：

(1) $\hat{\varphi}(\omega)$ 连续有界，$|\hat{\varphi}(\omega)|\leqslant\sqrt{3}$，$\hat{\varphi}(0)=1$；

(2) $\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2\equiv 1$；

(3) $H(\omega)=\dfrac{\hat{\varphi}(2\omega)}{\hat{\varphi}(\omega)}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\dfrac{1+\cos\omega}{2}\sqrt{\dfrac{2+\cos\omega}{1+2\cos^2\omega}}$ 是 2π 周期平方可积函数.

因此，子空间列 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 OMRA.

利用(3.39)式，得

$$\hat{\psi}(\omega)=G\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)=-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}\overline{H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$=\frac{16\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}}{\omega^2}\sin^4\frac{\omega}{4}\sqrt{\frac{1+2\sin^2\frac{\omega}{4}}{\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{\omega}{4}\right)\left(3-8\sin^2\frac{\omega}{4}+8\sin^4\frac{\omega}{4}\right)}}.$$

再作 Fourier 逆变换即可得正交小波 $\psi(t)$. 这就是著名的 **Franklin 小波**.

必须指出，一般情形下这个 Fourier 逆变换很难用解析式子来表示，通常只能用数值计算方法得到 $\psi(t)$ 的近似.

3.4 尺度函数的构造

正如我们已经知道的，利用多分辨率分析方法构造正交小波的关键是尺度函数. 现在，我们再来讨论尺度函数的构造. 下面的定理给出了一个具有紧支集的函数应满足哪些条件才能被取作尺度函数的频谱 $\hat{\varphi}(\omega)$. 这些条件都与 $\hat{\varphi}(\omega)$ 的支集有关，也比较容易检验，有助于构造尺度函数.

定理3.12 设实函数 $\hat{\varphi}(\omega)$ 连续，且 $\operatorname{supp}\hat{\varphi}=[a,b]$，则 $\hat{\varphi}(\omega)$ 满足下列条件：

(Ⅰ) $\hat{\varphi}(2\omega)=H(\omega)\hat{\varphi}(\omega)$，其中 $H(\omega)$ 是 2π 周期函数；

(Ⅱ) $\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2\equiv 1$

的充分必要条件是：

(1) $a<0$，$b>0$；

(2) $2\pi<b-a\leqslant\frac{8}{3}\pi$，$\frac{b}{2}-a\leqslant 2\pi$，$b-\frac{a}{2}\leqslant 2\pi$；

(3) 令 $c=b-a-2\pi$，则当 $\omega\in[a+c,b-c]$ 时，$|\hat{\varphi}(\omega)|\equiv 1$；

(4) 当 $\omega\in[a,a+c]$ 时，$|\hat{\varphi}(\omega)|^2+|\hat{\varphi}(\omega+2\pi)|^2\equiv 1$.

证 先证必要性. 将证明过程分为 5 个主要步骤，依次证明：

(A) $a\leqslant 0$，$b\geqslant 0$；

(B) $b-a>2\pi$；

(C) $b-a\leqslant\frac{8}{3}\pi$，$\frac{b}{2}-a\leqslant 2\pi$，$b-\frac{a}{2}\leqslant 2\pi$；

(D) $a\neq 0$，$b\neq 0$；

(E) 当 $\omega\in[a+c,b-c]$ 时，$|\hat{\varphi}(\omega)|^2\equiv 1$；而当 $\omega\in[a,a+c]$ 时，

$$|\hat{\varphi}(\omega)|^2+|\hat{\varphi}(\omega+2\pi)|^2\equiv 1.$$

下面我们依次证明这 5 个结论.

① 证明结论(A). 用反证法. 假设 $a>0$，则可取 $\varepsilon>0$，使

$$\frac{a}{2}+\varepsilon<a<a+2\varepsilon<b.$$

因为 $\operatorname{supp}\hat{\varphi}=[a,b]$，所以 $\hat{\varphi}(a+2\varepsilon)\neq 0$，且 $\hat{\varphi}\left(\frac{a}{2}+\varepsilon\right)=0$. 另一方面，根据条件(Ⅰ)得

$$\hat{\varphi}(a+2\varepsilon)=\hat{\varphi}\left(2\left(\frac{a}{2}+\varepsilon\right)\right)=H\left(\frac{a}{2}+\varepsilon\right)\hat{\varphi}\left(\frac{a}{2}+\varepsilon\right)=0.$$

此与 $\hat{\varphi}(a+2\varepsilon)\neq 0$ 矛盾，所以 $a\leqslant 0$. 同理可证 $b\geqslant 0$.

② 证明结论(B). 用反证法. 若 $b-a<2\pi$，则存在 ω_0，使 $\forall k\in\mathbf{Z}$，有 $\hat{\varphi}(\omega_0+2k\pi)=0$（图 3-6）. 这就与条件(Ⅱ)矛盾.

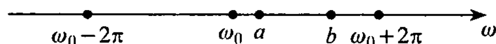


图 3-6

若 $b-a=2\pi$，则当 $\omega\in(a,b)$ 时，$\forall k\in\mathbf{Z}$，但 $k\neq 0$，有 $\omega\pm 2k\pi\notin \operatorname{supp}\hat{\varphi}$. 这时，由条件(Ⅱ)得

$$|\hat{\varphi}(\omega)|^2=\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2=1.$$

显然与 $\hat{\varphi}(\omega)$ 的连续性矛盾. 所以 $b-a>2\pi$.

③ 证明结论(C). 当 $\omega\in\left(a,\frac{a}{2}\right)\cup\left(\frac{b}{2},b\right)$时，$2\omega<a$ 或 $2\omega>b$，因此

$$\hat{\varphi}(2\omega)=0,\quad \hat{\varphi}(\omega)\neq 0.$$

由条件(Ⅰ)可知必有 $H(\omega)\equiv 0$，因此 $\operatorname{supp}H\subseteq\left[\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right]$. 又因为 $H(\omega)$ 是 2π 周期函数，故当 $\omega\in\left(a+2\pi,\frac{a}{2}+2\pi\right)\cup\left(\frac{b}{2}+2\pi,b+2\pi\right)$时，也有 $H(\omega)\equiv 0$，所以应有 $a+2\pi\geqslant\frac{b}{2}$，即 $\frac{b}{2}-a\leqslant 2\pi$. 同理可得 $b-\frac{a}{2}\leqslant 2\pi$，把这两式相加可得 $\frac{3}{2}b-\frac{3}{2}a\leqslant 4\pi$，即 $b-a\leqslant\frac{8}{3}\pi$.

④ 证明结论(D). 注意到已证明的结论(B) 和(C)，显然有

$$a\neq 0,\quad b\neq 0.$$

⑤ 证明结论(E). 因为 $\omega\in[a+c,b-c]$，所以 $\forall k\in\mathbf{Z}$，但 $k\neq 0$ 时，$\omega+2k\pi\notin[a,b]$，因而 $\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)=0$. 故由条件(Ⅱ)知

$$|\hat{\varphi}(\omega)|^2=\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2\equiv 1.$$

同理，当 $\omega\in[a,a+c]$ 时，若 $k\neq 0,1$，则 $\omega+2k\pi\notin[a,b]$. 所以

$$|\hat{\varphi}(\omega)|^2+|\hat{\varphi}(\omega+2\pi)|^2=\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2\equiv 1.$$

综上所证，由(A),(D) 即知(1) 成立，由(B),(C) 可推知(2)，由(E) 可推知(3),(4). 必要性得证.

再证充分性.

注意到条件(2)，函数 $\hat{\varphi}$ 的支撑区间的长度 $b-a\leqslant\frac{8}{3}\pi$，所以和式 $\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2$ 中至多有两项非零. 故由(3) 和(4) 即知(Ⅱ)成立.

现在需要证明的是，存在一个满足条件(Ⅰ)的函数 $H(\omega)$. 事实上，只需证当 $\omega\in[a,b]$ 时，$\hat{\varphi}(2\omega)=H(\omega)\hat{\varphi}(\omega)$ 即可.

为此，令 $H(\omega)=|\hat{\varphi}(2\omega)|$. 分为两种情形：

当 $\omega\in\left[a,\frac{a}{2}\right)\cup\left(\frac{b}{2},b\right]$时，由于 $2\omega\notin[a,b]$，有 $\hat{\varphi}(2\omega)=0$，所以 $\hat{\varphi}(2\omega)=H(\omega)\hat{\varphi}(\omega)$ 当然成立.

当 $\omega\in\left[\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right]$时，由$\frac{b}{2}-a\leqslant 2\pi$ 及 $b-\frac{a}{2}\leqslant 2\pi$，易知

$$a+c=b-2\pi=\frac{a}{2}+\left(b-\frac{a}{2}-2\pi\right)\leqslant\frac{a}{2},$$

$$b-c=a+2\pi=\frac{b}{2}+\left(a-\frac{b}{2}+2\pi\right)\geqslant\frac{b}{2}.$$

可见，$\left[\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right]\subseteq[a+c,b-c]$. 故由条件(3)可知 $|\hat{\varphi}(\omega)|\equiv 1$. 于是，也有

$$\hat{\varphi}(2\omega)=H(\omega)\hat{\varphi}(\omega).$$

因此，当 $\omega\in[a,b]$ 时，$\hat{\varphi}(2\omega)=H(\omega)\hat{\varphi}(\omega)$. ∎

例 3.4 Meyer 小波 这里，取

$$\hat{\varphi}(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\leqslant\frac{2\pi}{3},\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\theta\left(\frac{3|\omega|}{2\pi}-1\right)\right), & \frac{2\pi}{3}\leqslant|\omega|\leqslant\frac{4\pi}{3},\\ 0, & |\omega|>\frac{4\pi}{3},\end{cases}$$

其中 $\theta(t)$ 是满足条件：

(1) $\theta(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0,\\ 1, & t\geqslant 1;\end{cases}$

(2) $\theta(t)+\theta(1-t)=1 \quad (0\leqslant t\leqslant 1)$

的任一光滑函数. Daubechies 给出的这样一个函数是

$$\theta(t)=t^4(35-84t+70t^2-20t^3)\quad(0\leqslant t\leqslant 1).$$

容易验证，$\hat{\varphi}(\omega)$ 满足定理3.12的条件(1)～(4)，其Fourier逆变换 $\varphi(t)$ 是一个尺度函数. 利用(3.37)式，可得正交小波 $\psi(t)$ 的频谱是

$$\hat{\psi}(\omega)=\begin{cases}e^{i\frac{\omega}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{2}\theta\left(\frac{3|\omega|}{2\pi}-1\right)\right), & \frac{2\pi}{3}\leqslant|\omega|\leqslant\frac{4\pi}{3},\\ e^{i\frac{\omega}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}\theta\left(\frac{3|\omega|}{4\pi}-1\right)\right), & \frac{4\pi}{3}\leqslant|\omega|\leqslant\frac{8\pi}{3},\\ 0, & |\omega|\notin\left[\frac{2\pi}{3},\frac{8\pi}{3}\right].\end{cases}$$

对 $\hat{\psi}(\omega)$ 作 Fourier 逆变换即得 $\psi(t)$.

Meyer 小波不是紧支撑的，但衰减得很快：对任一正整数 k，都存在 $C_k>0$，使

$$|\psi(t)|\leqslant\frac{C_k}{(1+t^2)^k},$$

且 $\psi(t)$ 无限可微，具有很好的光滑性(参见文献[49]).

根据定理 3.12，可以得出一个构造频谱有限的尺度函数的一般性方法，分为以下几个主要步骤：

第一步，选定 a,b，满足条件 $a<0$，$b>0$，且

$$2\pi<b-a\leqslant\frac{8}{3}\pi,\quad \frac{b}{2}-a\leqslant 2\pi,\quad b-\frac{a}{2}\leqslant 2\pi.$$

通常取$[a,b]$为对称区间.

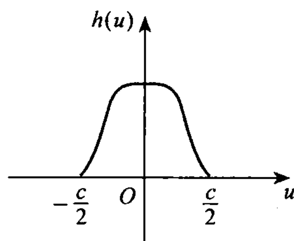


图 3-7

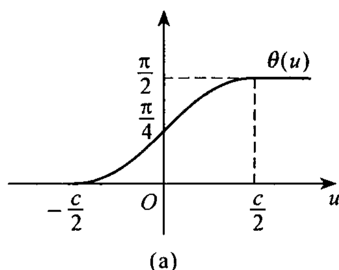
第二步，令 $c=b-a-2\pi$，构造钟形函数 $h(u)$，满足 $h(u)\geqslant 0$，$h(-u)=h(u)$，

$$\operatorname{supp} h\subset\left[-\frac{c}{2},\frac{c}{2}\right],$$

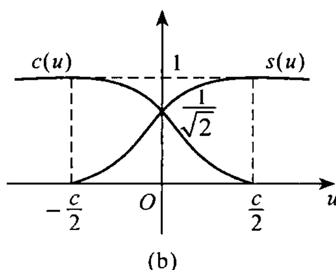
且$\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}$，如图 3-7 所示. $h(u)$ 的光滑程度可根据实际情况确定. $\hat{\varphi}(\omega)$ 的光滑程度取决于 $h(u)$ 的光滑程度. 所以这一步很重要.

第三步，先令 $\theta(t)=\int_{-\infty}^{t}h(u)\mathrm{d}u$，如图 3-8 (a) 所示. 显然$\theta(t)+\theta(-t)=\frac{\pi}{2}$，且当 $t\leqslant-\frac{c}{2}$ 时，$\theta(t)=0$，当 $t\geqslant\frac{c}{2}$ 时，$\theta(t)=\frac{\pi}{2}$.

再令 $s(t)=\sin\theta(t)$，$c(t)=\cos\theta(t)$，如图 3-8 (b) 所示. 易证 $s(t)=c(-t)$，且



(a)



(b)

图 3-8

$$s(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant \frac{c}{2},\\ 0, & t\leqslant -\frac{c}{2},\end{cases}\quad c(t)=\begin{cases}0, & t\geqslant \frac{c}{2},\\ 1, & t\leqslant -\frac{c}{2}.\end{cases}$$

最后令 $\hat{\varphi}(\omega)=s\left(\omega-a-\frac{c}{2}\right)c\left(\omega-b+\frac{c}{2}\right)$，如图 3-9 所示，这样的 $\hat{\varphi}(\omega)$ 满足定理 3.12 的条件(1) ~ (4).

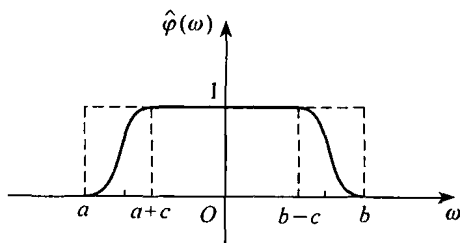


图 3-9

第四步，对 $\hat{\varphi}(\omega)$ 作 Fourier 逆变换，即可得到尺度函数 $\varphi(t)$.

当然，也可以直接由 $\hat{\varphi}(\omega)$ 来求出小波 $\psi(t)$ 的频谱函数

$$\hat{\psi}(\omega)=-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}\frac{\hat{\varphi}(\omega+2\pi)}{\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

由于 $\hat{\varphi}(\omega)$ 有紧支集，故 $\hat{\psi}(\omega)$ 也有紧支集，由此构造出来的正交小波 $\psi(t)$ 是频谱有限的，且 $\psi(t)$ 趋于零的速度可由钟形函数的光滑程度来控制. 因此，在整个构造过程中钟形函数是关键.

例 3.5 取 $-a=b=\frac{13}{12}\pi$，$c=b-a-2\pi=\frac{\pi}{6}$，以及

$$h(u)=\begin{cases}3\cos 12u+3, & -\frac{\pi}{12}\leqslant u\leqslant \frac{\pi}{12},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

显然，有

$$\theta(t)=\int_{-\infty}^{t}h(u)\mathrm{d}u=\begin{cases}0, & t\leqslant -\frac{\pi}{12},\\ \frac{\pi}{2}, & t\geqslant \frac{\pi}{12}.\end{cases}$$

当 $-\frac{\pi}{12}\leqslant u\leqslant \frac{\pi}{12}$ 时，有

$$\begin{aligned}\theta(t)&=\int_{-\infty}^{t}h(u)\mathrm{d}u=\int_{-\frac{\pi}{12}}^{t}(3\cos 12u+3)\mathrm{d}u\\ &=\frac{1}{4}\sin 12t+3t+\frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

$$\hat{\varphi}(\omega) = \sin\theta(\omega + \pi)\ \cos\theta(\omega - \pi).$$

最后，对 $\hat{\varphi}(\omega)$ 作 Fourier 逆变换求出 $\varphi(t)$. 由于 $\hat{\varphi}(\omega)$ 的二阶导数连续，三阶导数存在且有界，故作三次分部积分后，得

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b}\hat{\varphi}(\omega)\cos\omega t\ \mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b}\hat{\varphi}'''(\omega)\sin\omega t \cdot \frac{1}{t^3}\mathrm{d}\omega = O\Big(\frac{1}{t^3}\Big).$$

钟形函数 $h(u)$ 的选取一般是从一个具有紧支集的奇函数 $h_0(t)$ 出发，经过积分得到. 设 $\mathrm{supp}\,h_0 = [a,b]$，则令 $h(u) = \int_a^u h_0(t)\mathrm{d}t$，而 $h(u)$ 的光滑性比 $h_0(t)$ 的光滑性高一阶. 如例 3.5，可先取

$$h_0(t) = \begin{cases} -36\sin 12t, & -\dfrac{\pi}{12} \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{12}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

再令 $h(u) = \int_{-\frac{\pi}{12}}^{u} h_0(t)\mathrm{d}t$. 函数 $h_0(t)$ 和 $h(u)$ 的图形分别如图 3-10 (a) 和图 3-10 (b) 所示.

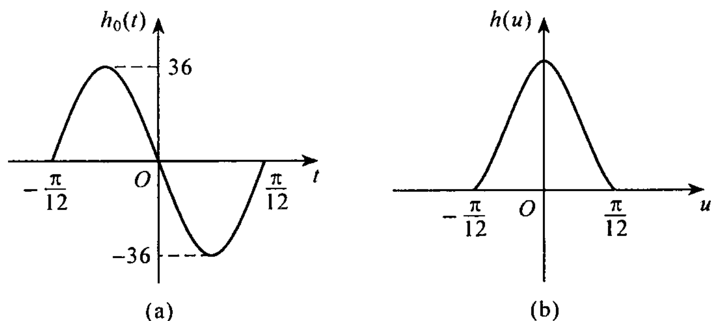


图 3-10

又如，取定 $a = -\dfrac{4}{3}\pi$，$b = \dfrac{4}{3}\pi$，可取 $h_0(t)$ 为分段线性函数

$$h_0(t) = \begin{cases} t + \dfrac{4}{3}\pi, & -\dfrac{4}{3}\pi \leqslant t \leqslant -\dfrac{2}{3}\pi, \\ -t, & -\dfrac{2}{3}\pi < t < \dfrac{2}{3}\pi, \\ t - \dfrac{4}{3}\pi, & \dfrac{2}{3}\pi \leqslant t \leqslant \dfrac{4}{3}\pi, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

则

$$h(u) = \int_{-\frac{4}{3}\pi}^{u} h_0(t)\mathrm{d}t$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{3}\pi t + \frac{8}{9}\pi^2, & -\frac{4}{3}\pi \leqslant t \leqslant -\frac{2}{3}\pi, \\ \frac{4}{9}\pi^2 - \frac{1}{2}t^2, & -\frac{2}{3}\pi < t < \frac{2}{3}\pi, \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{4}{3}\pi t + \frac{8}{9}\pi^2, & \frac{2}{3}\pi \leqslant t \leqslant \frac{4}{3}\pi, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

函数 $h_0(t)$ 和 $h(u)$ 的图形分别如图 3-11 (a) 和图 3-11 (b) 所示.

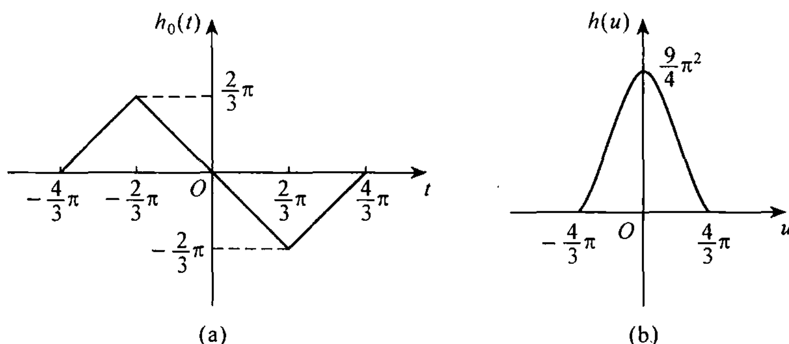


图 3-11

需要指出，用这种方法构造频谱有限的尺度函数的困难之处就在于求 Fourier 逆变换.

我们也可以从频谱有限函数的取样定理出发来构造尺度函数. 下面通过一个例子来说明其构造方法.

例 3.6 取 $\sigma = \frac{9\pi}{10}$, $f(t) \in B_\sigma$, 即当 $|\omega| > \frac{9\pi}{10}$ 时, $\hat{f}(\omega) = 0$. 取样间隔 $\Delta < \frac{\pi}{\sigma} = \frac{10}{9}$, 现取 $\Delta = 1$, 记 $\beta = \frac{\pi}{\Delta} - \sigma = \frac{\pi}{10}$. 先令

$$G(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{3\beta^3}(\omega + \sigma + 2\beta)^3, & -\sigma - 2\beta \leqslant \omega < -\sigma - \frac{3}{2}\beta, \\ \frac{\omega}{\beta} - \frac{2}{3\beta^3}(\omega + \sigma + \beta)^3 + \gamma, & -\sigma - \frac{3}{2}\beta \leqslant \omega < -\sigma - \frac{\beta}{2}, \\ 1 + \frac{2}{3\beta^3}(\omega + \sigma + \beta)^3 + \gamma, & -\sigma - \frac{\beta}{2} \leqslant \omega \leqslant -\sigma. \end{cases}$$

其中常数 $\gamma = \frac{1}{\beta}\left(\sigma + \frac{3}{2}\beta\right)$. 再取

$$\hat{\varphi}(\omega)=\begin{cases}G(\omega), & -\sigma-2\beta\leqslant\omega\leqslant-\sigma,\\ 1, & -\sigma\leqslant\omega\leqslant\sigma,\\ G(-\omega), & \sigma\leqslant\omega\leqslant\sigma+2\beta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

函数 $\hat{\varphi}(\omega)$ 的图形如图 3-12 所示.

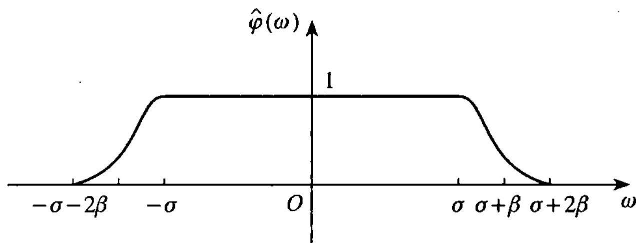


图 3-12

这里，如此选取函数 $G(\omega)$ 是为了使 $\hat{\varphi}(\omega)$ 保持一定的光滑性，以及

$$|\hat{\varphi}(\omega)|^2+|\hat{\varphi}(\omega+2\pi)|^2=1.$$

最后，对 $\hat{\varphi}(\omega)$ 作 Fourier 逆变换即得尺度函数

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{32\,000}{\pi^4}\frac{\sin^2\frac{\pi}{40}t\cdot\sin\frac{\pi}{20}t\cdot\sin\pi t}{t^4}.$$

这个尺度函数同时也是取样定理中的一个基函数.

下面我们来验证定理 3.12 的条件成立.

因为 $\sigma=\frac{9\pi}{10}$，$\beta=\frac{\pi}{10}$，所以

$$\operatorname{supp}\hat{\varphi}(\omega)=[-\sigma-2\beta,\sigma+2\beta]=\left[-\frac{11\pi}{10},\frac{11\pi}{10}\right].$$

(1) 这里，$a=-\frac{11\pi}{10}<0$，$b=\frac{11\pi}{10}>0$；

(2) $2\pi<b-a=\frac{22\pi}{10}<\frac{8}{3}\pi$，$\frac{b}{2}-a=b-\frac{a}{2}=\frac{33\pi}{20}<2\pi$；

(3) $c=b-a-2\pi=\frac{\pi}{5}$，$[a+c,b-c]=\left[-\frac{9\pi}{10},\frac{9\pi}{10}\right]$. 显然，有

$$|\hat{\varphi}(\omega)|\equiv1,\quad \omega\in[a+c,b-c];$$

(4) 当 $\omega\in[a,a+c]$ 时，

$$|\hat{\varphi}(\omega)|^2+|\hat{\varphi}(\omega+2\pi)|^2\equiv1.$$

因此，所构造的函数 $\hat{\varphi}(\omega)$ 满足定理 3.12 的(1)～(4)条件.

如果用光滑性与局部性都更好的速降函数

$$\hat{J}(\omega)=\begin{cases}c_\beta e^{\frac{\beta^2}{\omega^2-\beta^2}}, & |\omega|<\beta,\\ 0, & |\omega|\geqslant\beta,\end{cases}$$

来代替$G(\omega)$，这里c_β是使$\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{J}(\omega)\mathrm{d}\omega=1$的常数，则可以得到性质更好的尺度函数$\varphi(t)=\frac{J(t)\sin\pi t}{\pi t}$，这里$J(t)$是$\hat{J}(\omega)$的Fourier逆变换，但这个函数$\varphi(t)$的解析式难以得到(参见文献[181]).

3.5 正交样条小波

正交样条小波又称 Battle-Lemarié 小波族. 本节我们从 B- 样条函数出发，利用正交多尺度分析的构造理论给出相应的 B- 样条正交小波. 首先，我们介绍 B- 样条函数的定义和性质.

3.5.1 样条函数及其性质

样条函数具有许多良好的性质，因而有着广泛的实际应用. 为便于介绍 B- 样条函数的定义及其有关性质，下面先引进差分算子与半截单项式的概念.

定义 3.5 设m为自然数，函数$f(t)$的**差分算子**∇定义为

$$\nabla f(t)=f(t)-f(t-1),$$
$$\nabla^m f(t)=\nabla(\nabla^{m-1}f(t)),\tag{3.51}$$

分别称为$f(t)$的一阶差分和m阶差分.

容易验证：对任意自然数m，有

(1) 若$f(t)\in P[t]_{m-1}$，则$\nabla^m f(t)=0$； (3.52)

(2) $\nabla^m f(t)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}f(t-k)$； (3.53)

(3) 差分算子∇的 Leibnitz 公式：

$$\nabla^m(fg)(t)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(\nabla^k f)(\nabla^{m-k}g)(t-k),\tag{3.54}$$

其中$\binom{m}{k}=\frac{m!}{k!(m-k)!}$.

定义 3.6 对于自然数m，我们定义m次**半截单项式**为

$$t_+^m = \begin{cases} t^m, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{3.55}$$

此外，我们规定：当 $m = 0$ 时，

$$t_+^0 = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

显然，半截单项式有如下性质：

(1) $(t_+^m)' = mt_+^{m-1}$；

(2) $(t_+)' = t_+^0$.

定义 3.7　设 m 为自然数，则 m 阶 B- 样条定义为

$$N_m(t) = \frac{1}{(m-1)!} \nabla^m t_+^{m-1}. \tag{3.56}$$

根据差分算子的性质(3.53)式，易知

$$N_m(t) = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} (t-k)_+^{m-1}. \tag{3.57}$$

显然，$\forall n \in \mathbf{Z}^+$，$N_m(t)$ 在区间$[n, n+1]$上是一个 $m-1$ 次多项式. 经过简单计算，可得 $N_1(t), N_2(t), N_3(t)$ 的表达式分别如下：

$$N_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$N_2(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t < 1, \\ 2-t & 1 \leqslant 0 \leqslant 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$N_3(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & 0 \leqslant t < 1, \\ \frac{3}{4} - (t - \frac{3}{2})^2, & 1 \leqslant t < 2, \\ \frac{1}{2}(3-t)^2, & 2 \leqslant t \leqslant 3, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

这与本章例 3.3 的计算结果一致. 事实上，我们有如下定理.

定理 3.13　当 $m \geqslant 2$ 时，m 阶 B- 样条 $N_m(t)$ 具有卷积表示式：

$$\begin{aligned} N_m(t) &= (N_{m-1} * N_1)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} N_{m-1}(t-u) N_1(u) \mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 N_{m-1}(t-u) \mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{3.58}$$

证 由 B- 样条 $N_m(t)$ 的定义(3.56)式可知

$$N_{m-1}(t)=\frac{1}{(m-2)!}\nabla^{m-1}t_+^{m-2},$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^1 N_{m-1}(t-u)\mathrm{d}u&=\frac{1}{(m-2)!}\nabla^{m-1}\int_0^1(t-u)_+^{m-2}\,\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{(m-2)!}\nabla^{m-1}\left(\frac{t_+^{m-1}}{m-1}-\frac{(t-1)_+^{m-1}}{m-1}\right)\\&=\frac{1}{(m-1)!}\nabla^m t_+^{m-1}=N_m(t).\end{aligned}$$ ∎

顺便指出，有的文献就是用(3.58)式作为 B- 样条 $N_m(t)$ 的定义的.

定理3.14 m 阶 B- 样条 $N_m(t)$ 具有下述性质:

(1) 对于 $f(t)\in C(\mathbf{R})$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)N_m(t)\mathrm{d}t=\int_0^1\cdots\int_0^1 f(t_1+\cdots+t_m)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_m.$$

(2) $N_m'(t)=\nabla N_{m-1}(t)=N_{m-1}(t)-N_{m-1}(t-1)$, $m\geqslant 2$.

(3) $\operatorname{supp}N_m(t)=[0,m]$.

(4) $N_m(t)>0$, $\forall t\in(0,m)$.

(5) $$\int_{-\infty}^{+\infty}N_m(t)\mathrm{d}t=1. \tag{3.59}$$

(6) $$\sum_{k\in\mathbf{Z}}N_m(t-k)\equiv 1,\ \forall t\in\mathbf{R}. \tag{3.60}$$

(7) $N_m(t)$ 具有关于其支集中心的对称性，即

$$N_m\left(\frac{m}{2}+t\right)=N_m\left(\frac{m}{2}-t\right),\quad \forall t\in\mathbf{R}. \tag{3.61}$$

(8) $$\hat{N}_m(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}N_m(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{\mathrm{i}\omega}\right)^m. \tag{3.62}$$

(9) 递推关系:

$$N_m(t)=\frac{t}{m-1}N_{m-1}(t)+\frac{m-t}{m-1}N_{m-1}(t-1). \tag{3.63}$$

证 下面的证明大都对阶数 m 作数学归纳法.

(1) 当 $m=1$ 时结论显然成立. 今假设结论对 $m-1$ 成立，则对 m 有

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left(\int_0^1 N_{m-1}(t-u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)N_{m-1}(t-u)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u\\&=\int_0^1\left(\int_0^1 f(t+u)N_{m-1}(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(t_1 + \cdots + t_{m-1} + u) \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_{m-1} \mathrm{d}u$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(t_1 + \cdots + t_{m-1} + t_m) \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_{m-1} \mathrm{d}t_m.$$

(2) 当 $m \geqslant 2$ 时，对(3.58)式两端求导，得

$$N'_m(t) = \int_0^1 N'_{m-1}(t-u) \mathrm{d}u = N_{m-1}(t) - N_{m-1}(t-1)$$
$$= \nabla N_{m-1}(t).$$

(3) 根据 $N_m(t)$ 的定义(3.56)式，显然，当 $t > m$ 时，

$$N_m(t) = \frac{1}{(m-1)!} \nabla^m t_+^{m-1} = 0;$$

当 $t < 0$ 时，$N_m(t) = 0$. 故 $\operatorname{supp} N_m(t) = [0, m]$.

(4) 当 $m = 1$ 时，显然

$$N_1(t) > 0, \quad \forall t \in (0,1).$$

假设对于 $m \geqslant 2$，有

$$N_{m-1}(t) > 0, \quad \forall t \in (0, m-1),$$

则 $\forall t \in (0,m)$，由(3.58)式，有

$$N_m(t) = \int_0^1 N_{m-1}(t-u) \mathrm{d}u = \int_{t-1}^t N_{m-1}(u) \mathrm{d}u$$
$$= \left(\int_{t-1}^0 + \int_0^{m-1} + \int_{m-1}^t\right) N_{m-1}(u) \mathrm{d}u.$$

对于上式右端的3个积分，第1个和第3个显然非负，第2个可由归纳假设推知大于零，所以 $N_m(t) > 0$.

(5) 在已证得的性质(1)中取 $f(t) \equiv 1$ 即得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N_m(t) \mathrm{d}t = 1.$$

(6) 当 $m = 1$ 时，显然有 $\sum_{k \in \mathbf{Z}} N_m(t-k) \equiv 1$，$\forall t \in \mathbf{R}$. 当 $m \geqslant 2$ 时，由 $N_m(t)$ 的定义(3.58)式知

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} N_m(t-k) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \int_0^1 N_{m-1}(t-k-u) \mathrm{d}u$$
$$= \sum_{k \in \mathbf{Z}} \int_k^{k+1} N_{m-1}(t-u) \mathrm{d}u$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} N_{m-1}(t-u) \mathrm{d}u$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} N_{m-1}(u) \mathrm{d}u = 1.$$

(7) 当 $m = 1$ 时，显然有 $N_1\left(\frac{1}{2} + t\right) = N_1\left(\frac{1}{2} - t\right)$，即 $N_1(t)$ 以 $t = \frac{1}{2}$

为对称轴. 假设 $m-1$ 时结论成立，即

$$N_{m-1}\left(\frac{m-1}{2}+t\right)=N_{m-1}\left(\frac{m-1}{2}-t\right),$$

则由(3.58)式并利用上述归纳假设，有

$$\begin{aligned}N_m\left(\frac{m}{2}+t\right)&=\int_0^1 N_{m-1}\left(\frac{m}{2}+t-u\right)\mathrm{d}u\\&=\int_0^1 N_{m-1}\left(\frac{m-1}{2}+\left(\frac{1}{2}+t-u\right)\right)\mathrm{d}u\\&=\int_0^1 N_{m-1}\left(\frac{m-1}{2}-\left(\frac{1}{2}+t-u\right)\right)\mathrm{d}u\\&=\int_0^1 N_{m-1}\left(\frac{m}{2}-t-(1-u)\right)\mathrm{d}u\\&=\int_0^1 N_{m-1}\left(\frac{m}{2}-t-\tau\right)\mathrm{d}\tau\\&=N_m\left(\frac{m}{2}-t\right).\end{aligned}$$

(8) 当 $m=1$ 时，直接求 $N_1(t)$ 的 Fourier 变换，得

$$\hat{N}_1(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}N_1(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\int_0^1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{\mathrm{i}\omega}.$$

假设结论对于 $m-1\geqslant 1$ 时成立，即

$$\hat{N}_{m-1}(\omega)=\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{\mathrm{i}\omega}\right)^{m-1},$$

根据定理 3.13 以及卷积与 Fourier 变换的关系，得

$$\begin{aligned}\hat{N}_m(\omega)&=\hat{N}_{m-1}(\omega)\hat{N}_1(\omega)=\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{\mathrm{i}\omega}\right)^{m-1}\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{\mathrm{i}\omega}\\&=\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{\mathrm{i}\omega}\right)^{m}.\end{aligned}$$

∎

(9) 易知 $t_+^{m-1}=t\cdot t_+^{m-2}$. 取 $f(t)=t$, $g(t)=t_+^{m-2}$，代入差分算子 ∇ 的 Leibnitz 公式(3.54)式，并注意到当 $k\geqslant 2$ 时 $\nabla^k f(t)=0$，得

$$\begin{aligned}\nabla^m t_+^{m-1}&=\nabla^m(t\cdot t_+^{m-2})=t\nabla^m t_+^{m-2}+m\nabla^{m-1}(t-1)_+^{m-2}\\&=t\left(\nabla^{m-1}t_+^{m-2}-\nabla^{m-1}(t-1)_+^{m-2}\right)+m\nabla^{m-1}(t-1)_+^{m-2}\\&=t\nabla^{m-1}t_+^{m-2}-(m-t)\nabla^{m-1}(t-1)_+^{m-2}.\end{aligned}$$

将上式两边同乘以 $\frac{1}{(m-1)!}$，并利用(3.56)式，即得(3.63)式. ∎

定理3.15 m 阶 B- 样条 $N_m(t)$ 是 $m-1$ 阶正则的函数.

证 由于 $N_m(t)$ 具有有限支集$[0,m]$，故是速降的. 而 $N_m(t)\in C^{m-2}(\mathbf{R})$是分段$m-1$次多项式，故$N_m^{(m-2)}(t)\in C^0(\mathbf{R})$是分段线性函数，除有限个点外处处可微，$N_m^{(m-1)}(t)$ 为具有有限支集的阶梯函数，故 $N_m(t)$ 是 $m-1$ 阶正则的. ∎

定理3.16 设 m 为自然数，令

$$\Omega_m(\omega)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{N}_m(\omega+2k\pi)|^2, \tag{3.64}$$

则 $\Omega_m(\omega)$ 具有如下性质：

(1) $\Omega_m(\omega)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的 2π 周期连续函数.

(2) 存在正常数 $A_m>0$, $B_m>0$，使得 $\forall\omega\in\mathbf{R}$，都有

$$A_m\leqslant\Omega_m(\omega)\leqslant B_m. \tag{3.65}$$

(3) $\Omega_m(\omega)$ 是三角多项式，即 $\forall\omega\in\mathbf{R}$，恒成立

$$\begin{aligned}\Omega_m(\omega)&=\sum_{n=-m}^{m}N_{2m}(m-n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega}\\&=N_{2m}(m)+2\sum_{n=1}^{m}N_{2m}(m-n)\cos n\omega.\end{aligned} \tag{3.66}$$

证 (1) 由样条函数的性质(3.62)式，得

$$\hat{N}_m(\omega)=\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{\mathrm{i}\omega}\right)^m=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{m}{2}\omega}\left(\frac{2\sin\frac{\omega}{2}}{\omega}\right)^m,$$

于是有

$$\begin{aligned}\Omega_m(\omega)&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{N}_m(\omega+2k\pi)|^2=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left(\frac{2\sin\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)}{\omega+2k\pi}\right)^{2m}\\&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left(\frac{2\sin\frac{\omega}{2}}{\omega+2k\pi}\right)^{2m}.\end{aligned} \tag{3.67}$$

由此可见，$\Omega_m(\omega)$是2π周期函数，且(3.67)式中的无穷级数在实轴上的任何闭区间上都是一致收敛的，因此所定义的函数$\Omega_m(\omega)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是连续的.

(2) 因为$\Omega_m(\omega)$是$\mathbf{R}$上的 2π 周期连续函数，且在$\mathbf{R}$上处处取正值，所以存在 $A_m>0$, $B_m>0$，使(3.65)式 $\forall\omega\in\mathbf{R}$ 成立.

(3) 根据已证得的性质(1)可知，$\Omega_m(\omega)$ 可以展开成 Fourier 级数：

$$\Omega_m(\omega)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\beta_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega},$$

其中的 Fourier 系数

$$\beta_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Omega_m(\omega) e^{-in\omega} d\omega.$$

将(3.67)式代入上式，得

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k\in \mathbf{Z}} \left(\frac{2\sin\frac{\omega}{2}}{\omega + 2k\pi}\right)^{2m} e^{-in\omega} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in \mathbf{Z}}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \left(\frac{2\sin\frac{\omega}{2}}{\omega}\right)^{2m} e^{-in\omega} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2\sin\frac{\omega}{2}}{\omega}\right)^{2m} e^{-in\omega} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-im\omega}\left(\frac{2\sin\frac{\omega}{2}}{\omega}\right)^{2m} e^{i(m-n)\omega} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{N}_{2m}(\omega) e^{i(m-n)\omega} d\omega \\
&= N_{2m}(m-n),
\end{aligned}$$

注意到 $\operatorname{supp} N_{2m}(t) = [0, 2m]$，所以

$$\Omega_m(\omega) = \sum_{n\in \mathbf{Z}} N_{2m}(m-n) e^{in\omega} = \sum_{n=-m}^{m} N_{2m}(m-n) e^{in\omega}. \qquad \blacksquare$$

3.5.2 样条多分辨率分析

考虑由 B- 样条 $N_m(t)$ 的二进伸缩与整数平移生成的子空间

$$V_j^m = \overline{\operatorname{span}}\{2^{\frac{j}{2}} N_m(2^j t - k),\ k \in \mathbf{Z}\},\quad j \in \mathbf{Z},$$

我们将证明：$\{V_j^m\}_{j\in \mathbf{Z}}$ 构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 GMRA，称之为**样条多分辨率分析**. 整个证明分为 4 个部分，即下面的定理 3.17 ～ 定理 3.20.

定理3.17 $\{N_m(t-k),\ k \in \mathbf{Z}\}$ 构成 V_0^m 的 Riesz 基.

证 对任意 $n \in \mathbf{N}$，由 Parseval 恒等式及(3.64)式，有

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{|k|\leqslant n} c_k N_m(t-k) \right\|_2^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\| \sum_{|k|\leqslant n} c_k e^{-ik\omega} \hat{N}_m(\omega) \right\|_2^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{|k|\leqslant n} c_k e^{-ik\omega} \right|^2 |\hat{N}_m(\omega)|^2 d\omega
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{p\in\mathbf{Z}}\int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi}\Big|\sum_{|k|\leqslant n}c_k e^{-ik\omega}\Big|^2|\hat{N}_m(\omega)|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{p\in\mathbf{Z}}\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{|k|\leqslant n}c_k e^{-ik\omega}\Big|^2|\hat{N}_m(\omega+2p\pi)|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{|k|\leqslant n}c_k e^{-ik\omega}\Big|^2\sum_{p\in\mathbf{Z}}|\hat{N}_m(\omega+2p\pi)|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{|k|\leqslant n}c_k e^{-ik\omega}\Big|^2\Omega_m(\omega)d\omega.$$

由定理 3.16 的结论(2) 可知，存在常数 $A_m>0$，$B_m>0$，使得

$$A_m\leqslant\Omega_m(\omega)\leqslant B_m,\quad \forall\omega\in\mathbf{R}.$$

于是，$\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$A_m\sum_{|k|\leqslant n}|c_k|^2\leqslant\Big\|\sum_{|k|\leqslant n}c_kN_m(t-k)\Big\|_2^2\leqslant B_m\sum_{|k|\leqslant n}|c_k|^2. \tag{3.68}$$

由此可以得出结论：

(1) $\forall f(t)\in V_0^m$，必存在唯一的$\{c_k\}\in l^2$，使

$$f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_kN_m(t-k).$$

这是因为若另有$\{c'_k\}\in l^2$，使

$$f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c'_kN_m(t-k),$$

此时令 $\alpha_k=c_k-c'_k$，则必有

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}\alpha_kN_m(t-k)=0,$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty}\Big\|\sum_{|k|\leqslant n}\alpha_kN_m(t-k)\Big\|_2=0.$$

故由(3.68) 式可得$\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\alpha_k|^2=0$. 这说明 $\alpha_k=0$，即 $c'_k=c_k$，$\forall k\in\mathbf{Z}$.

(2) $\forall\{c_k\}\in l^2$，在式(3.68) 中令 $n\to+\infty$，则得

$$A_m\sum_{k\in\mathbf{Z}}|c_k|^2\leqslant\Big\|\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_kN_m(t-k)\Big\|_2^2\leqslant B_m\sum_{k\in\mathbf{Z}}|c_k|^2.$$

这就证得$\{N_m(t-k),\ k\in\mathbf{Z}\}$ 是 V_0^m 的 Riesz 基. ∎

定理3.18 设 m 为自然数，$f(t)\in C_c^0(\mathbf{R})$，则当 $n\to+\infty$ 时，

$$S_n(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}f\Big(\frac{k}{n}+\frac{m}{2n}\Big)N_m(nt-k)$$

在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛于 $f(t)$. 同时，$S_n(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上也平方收敛于 $f(t)$.

证 引进连续模数，$\forall \delta > 0$，令

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{|t_1 - t_2| \leqslant \delta \\ t_1, t_2 \in \mathbf{R}}} |f(t_1) - f(t_2)|.$$

由于 $f(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致连续，故有

$$\lim_{\delta \to 0^+} \omega(\delta) = 0.$$

注意到样条 $N_m(t)$ 的性质(3.60)式，有

$$\begin{aligned}
|S_n(t) - f(t)| &= \left| \sum_{k \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{k}{n} + \frac{m}{2n}\right) N_m(nt - k) - f(t) \right| \\
&\leqslant \sum_{k \in \mathbf{Z}} \left| f\left(\frac{k}{n} + \frac{m}{2n}\right) - f(t) \right| N_m(nt - k) \\
&\leqslant \omega\left(\frac{m}{2n}\right) \sum_{k \in \mathbf{Z}} N_m(nt - k) \\
&= \omega\left(\frac{m}{2n}\right), \quad \forall t \in \mathbf{R}.
\end{aligned}$$

因此，当 $n \to +\infty$ 时，$S_n(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛于 $f(t)$.

下面再证：当 $n \to +\infty$ 时，$S_n(t)$ 平方收敛于 $f(t)$.

设 $f(t) \in C_c^0(\mathbf{R})$ 的支集包含在 $[-K, K]$ 内. 由上述证明可知，对于任给 $\varepsilon > 0$，存在常数 $M > 0$，使当 $n \geqslant M$ 时，有

$$|S_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2K + 2m}}, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

此时，有

$$\begin{aligned}
\|S_n - f\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |S_n(t) - f(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-K-m}^{K+m} |S_n(t) - f(t)|^2 \mathrm{d}t \\
&< \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2K + 2m}}\right)^2 (2K + 2m) = \varepsilon^2,
\end{aligned}$$

从而

$$\|S_n - f\|_2 < \varepsilon.$$

故当 $n \to +\infty$ 时，$S_n(t)$ 平方收敛于 $f(t)$. ∎

定理3.19 $\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j^m$ 在 $L^2(\mathbf{R})$ 中稠密，即 $\overline{\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j^m} = L^2(\mathbf{R})$.

证 任取 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$. 则 $\forall \varepsilon > 0$，根据 $\mathbf{R}$ 上平方可积函数的定义，必存在具有有限支集的可测函数

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [-M, M], \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

使$\|f-g\|_2<\frac{\varepsilon}{3}$. 对 $g(t)$ 应用 Lusin 定理，必存在 $u(t)\in C^0(\mathbf{R})$，使

$$\mu\{t\in\mathbf{R}\mid g(t)\neq u(t)\}$$

充分小，从而可保证$\|g-u\|_2<\frac{\varepsilon}{3}$. 根据定理 3.18，存在正整数 $N>0$，使当 $n>N$ 时$\|S_{2^n}-u\|_2<\frac{\varepsilon}{3}$. 于是有

$$\|S_{2^n}-f\|_2\leqslant\|S_{2^n}-u\|_2+\|u-g\|_2+\|g-f\|_2<\varepsilon.$$

所以 $f(t)\in\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}}V_j^m}$. 因此$\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}}V_j^m}=L^2(\mathbf{R})$. ∎

定理3.20 $\{V_j^m\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 GMRA，而 $N_m(t)$ 是对应的尺度函数，具有 $m-1$ 阶正则性.

证 显然 V_j^m 都是 $L^2(\mathbf{R})$ 的闭子空间(因 l^2 是闭空间). 下面只需逐一验证 GMRA 的 5 个条件都满足.

(1) $V_j^m\subset V_{j+1}^m$，$j\in\mathbf{Z}$.

利用(3.62)式，即 $\hat{N}_m(\omega)=\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{\mathrm{i}\omega}\right)^m$，有

$$\hat{N}_m(2\omega)=\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega}}{2\mathrm{i}\omega}\right)^m=\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2}\right)^m\hat{N}_m(\omega)$$
$$=\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m}\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}\hat{N}_m(\omega).$$

对上式求 Fourier 逆变换，得

$$N_m(t)=\frac{1}{2^{m-1}}\sum_{k=0}^{m}\begin{bmatrix}m\\k\end{bmatrix}N_m(2t-k),$$

可见 $V_0^m\subset V_1^m$，因而有 $V_j^m\subset V_{j+1}^m$，$\forall j\in\mathbf{Z}$.

(2) $f(t)\in V_j^m\Leftrightarrow f(2t)\in V_{j+1}^m$. 显然.

(3) $\bigcap_{j\in\mathbf{Z}}V_j^m=\{0\}$.

由于 $\bigcap_{j\in\mathbf{Z}}V_j^m$ 中只含有以原点为结点的分段$m-1$ 次多项式，而这些分段 $m-1$ 次多项式只含有 0 属于 $L^2(\mathbf{R})$，故 $\bigcap_{j\in\mathbf{Z}}V_j^m=\{0\}$.

(4) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}}V_j^m}=L^2(\mathbf{R})$. 此即定理 3.19.

(5) $\{N_m(t-k),k\in\mathbf{Z}\}$ 构成 V_0^m 的 Riesz 基，其中 $N_m(t)\in V_0^m$ 是对应的 $m-1$ 阶正则的尺度函数. 此即定理 3.17 与定理 3.15.

因此，$\{V_j^m\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 GMRA，且尺度函数 $N_m(t)$ 具有 $m-1$

阶正则性. ∎

进一步，根据定理 3.3，可对 $N_m(t)$ 作正交化处理，令

$$\hat{\varphi}_m(\omega)=(\Omega_m(\omega))^{-\frac{1}{2}}\hat{N}_m(\omega),\tag{3.69}$$

其中 $\Omega_m(\omega)$ 由 (3.64) 式给出，则由此所确定的 $\varphi_m(t)$ 具有 $m-1$ 阶正则性，因此 $\varphi_m(t)$ 的二进伸缩与整数平移生成的子空间列

$$U_j^m=\overline{\mathrm{span}}\{2^{\frac{j}{2}}\varphi_m(2^jt-k),\ k\in\mathbf{Z}\},\quad j\in\mathbf{Z}\tag{3.70}$$

构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 $m-1$ 阶正则的 OMRA.

于是，$\{2^{\frac{j}{2}}\varphi_m(2^jt-k),\ k\in\mathbf{Z}\}$ 构成 U_j^m 的一个标准正交基，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}2^{\frac{j}{2}}\varphi_m(2^jt-k)\,\overline{2^{\frac{j}{2}}\varphi_m(2^jt-l)}\,\mathrm{d}t=\delta_{kl},$$

特别有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_m(t-k)\,\overline{\varphi_m(t-l)}\,\mathrm{d}t=\delta_{kl},\tag{3.71}$$

并且有

$$f(t)\in V_j^m\Leftrightarrow f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\langle f,2^{\frac{j}{2}}\varphi_m(2^j\cdot-k)\rangle 2^{\frac{j}{2}}\varphi_m(2^jt-k).$$

显然，若在(3.71) 式中取 $k=0$，$l=0$，则得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi_m(t)|^2\mathrm{d}t=1.\tag{3.72}$$

3.5.3 正交样条小波的构造

现在的问题是，样条正交尺度函数 $\varphi_m(t)$ 如何计算?

首先，根据定理 3.16 的结论(1)，$(\Omega_m(\omega))^{-\frac{1}{2}}$ 可展开成 Fourier 级数

$$(\Omega_m(\omega))^{-\frac{1}{2}}=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\alpha_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega},$$

其中

$$\alpha_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}}{(\Omega_m(\omega))^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}\omega.\tag{3.73}$$

再由定理 3.16 的结论(3)，有

$$\Omega_m(\omega)=\sum_{n=-m}^{m}N_{2m}(m-n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega},$$

对(3.69) 式求 Fourier 逆变换，即得

$$\varphi_m(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\alpha_kN_m(t-k),\tag{3.74}$$

其中系数 α_k 由(3.73)式给出.

定理3.21 m 阶 B-样条尺度函数 $\varphi_m(t)$ 具有以下性质：

(1) 连续标准化条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_m(t)\,\mathrm{d}t = 1. \tag{3.75}$$

(2) 离散标准化条件

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}}\varphi_m(t+l) = 1. \tag{3.76}$$

(3) 关于 $t=\frac{m}{2}$ 的对称性：

$$\varphi_m\left(\frac{m}{2}+t\right)=\varphi_m\left(\frac{m}{2}-t\right). \tag{3.77}$$

证 (1) 易知 $\Omega_m(0)=1$，$\hat{N}_m(0)=1$. 根据(3.69)式得

$$\hat{\varphi}_m(0)=(\Omega_m(0))^{-\frac{1}{2}}\hat{N}_m(0)=1,$$

即(3.75)式.

(2) 利用(3.74)式及(3.60)式，有

$$\begin{aligned}\sum_{l\in\mathbf{Z}}\varphi_m(t+l) &= \sum_{l\in\mathbf{Z}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\alpha_k N_m(t+l-k)\\ &= \sum_{k\in\mathbf{Z}}\alpha_k\sum_{l\in\mathbf{Z}}N_m(t+l-k)\\ &= \sum_{k\in\mathbf{Z}}\alpha_k = (\Omega_m(0))^{-\frac{1}{2}} = 1.\end{aligned}$$

(3) 根据定理3.16的结论(3)以及(3.73)式，易知

$$\alpha_{-k}=\alpha_k,\quad \forall k\in\mathbf{Z}.$$

再由(3.74)式即可推得 $\varphi_m(t)$ 的对称性(3.77)式. ∎

对于样条尺度函数 $\varphi_m(t)$，考虑双尺度方程的频域形式

$$\hat{\varphi}_m(2\omega)=H_m(\omega)\hat{\varphi}_m(\omega), \tag{3.78}$$

则由(3.69)式及(3.62)式可得

$$\begin{aligned}H_m(\omega) &= \frac{\hat{\varphi}_m(2\omega)}{\hat{\varphi}_m(\omega)} = \left(\frac{\Omega_m(\omega)}{\Omega_m(2\omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\hat{N}_m(2\omega)}{\hat{N}_m(\omega)}\\ &= \left(\frac{\Omega_m(\omega)}{\Omega_m(2\omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2}\right)^m\\ &= \left(\frac{\Omega_m(\omega)}{\Omega_m(2\omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^m\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\frac{\omega}{2}}.\end{aligned} \tag{3.79}$$

可见，$H_m(\omega)$ 是 2π 周期连续函数，故可以展开成 Fourier 级数：

$$H_m(\omega)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega},\tag{3.80}$$

其中

$$\begin{aligned}h_k&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}H_m(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\Omega_m(\omega)}{\Omega_m(2\omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\cos^m\frac{\omega}{2}\ \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}m\omega}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\Omega_m(\omega)}{\Omega_m(2\omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\cos^m\frac{\omega}{2}\ \mathrm{e}^{i\left(k-\frac{m}{2}\right)\omega}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\Omega_m(\omega)}{\Omega_m(2\omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\cos^m\frac{\omega}{2}\cos\left(k-\frac{m}{2}\right)\omega\,\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

由此易知

$$h_{m-k}=h_k.\tag{3.81}$$

现在，我们讨论正交样条小波的构造及其性质. 为此，令

$$g_k=(-1)^k\bar{h}_{1-k},\tag{3.82}$$

$$\psi_m(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}g_k\varphi_m(2t-k),\tag{3.83}$$

称 $\psi_m(t)$ 为 m 阶 **B-样条正交小波**，而称 $\{\psi_m(t)\}$ 为 **Battle-Lemarié 小波族.**

对(3.83)式两端作 Fourier 变换，得

$$\hat{\psi}_m(\omega)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}\overline{H_m\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\hat{\varphi}_m\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

或

$$\hat{\psi}_m(2\omega)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\overline{H_m(\omega+\pi)}\hat{\varphi}_m(\omega)=G_m(\omega)\hat{\varphi}_m(\omega),\tag{3.84}$$

其中 $G_m(\omega)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\overline{H_m(\omega+\pi)}$.

定理3.22 m 阶 B-样条正交小波 $\psi_m(t)$ 具有下述意义下的对称性：

$$\psi_m\left(\frac{1+t}{2}\right)=(-1)^m\psi_m\left(\frac{1-t}{2}\right).\tag{3.85}$$

证 根据(3.81)式，得

$$\begin{aligned}g_k&=(-1)^k\bar{h}_{1-k}=(-1)^k\bar{h}_{m-1+k}\\&=(-1)^k(-1)^{2-m-k}\bar{h}_{1-(2-m-k)}(-1)^{2-m-k}\\&=(-1)^m g_{2-m-k}.\end{aligned}$$

利用 $\varphi_m(t)$ 的对称性(3.77)式，得

$$\begin{aligned}\psi_m\left(\frac{1+t}{2}\right) &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} g_k\varphi_m(t+1-k)\\ &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} g_k\varphi_m(m-t-1+k)\\ &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} g_{2-m-k}\varphi_m(-t-k+1)\\ &= (-1)^m\sum_{k\in\mathbf{Z}} g_k\varphi_m(-t-k+1)\\ &= (-1)^m\psi_m\left(\frac{1-t}{2}\right).\end{aligned}$$

∎

定理3.23 m 阶 B-样条正交小波 $\psi_m(t)$ 具有 m 阶消失矩，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^p\psi_m(t)\mathrm{d}t = 0,\quad p=0,1,\cdots,m-1,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\psi_m(t)\mathrm{d}t \neq 0.$$

证 根据(3.84)式及(3.79)式，有

$$\hat{\psi}_m(2\omega) = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\hat{\varphi}_m(\omega)\left(\frac{\Omega_m(\omega+\pi)}{\Omega_m(2\omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}}{2}\right)^m.$$

因为 $\hat{\psi}_m(2\omega)$ 中有因式 $\left(\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}}{2}\right)^m$，所以 $\hat{\psi}_m^{(p)}(0)=0$，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^p\psi_m(t)\mathrm{d}t = 0,\quad p=0,1,\cdots,m-1.$$

而 $\hat{\psi}_m^{(m)}(0)\neq 0$，即 $\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\psi_m(t)\mathrm{d}t \neq 0$. ∎

定理3.24 m 阶 B-样条正交小波 $\psi_m(t)$ 具有指数型衰减性，即

$$\psi_m(t) = O(\mathrm{e}^{-\alpha|t|}),\quad \text{其中 } \alpha>0 \text{ 是常数}.$$

证 此处从略，读者可参见文献[49]. ∎

习 题 3

1. 设函数 $f(x)=x^4(ax^3+bx^2-84x+c)$，试确定 a,b,c 的值，使

$$f(x)+f(1-x)=1,\quad \forall x\in[0,1].$$

2. 证明：当 $n\neq 0$ 时，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi t}{\pi t} \frac{\sin \pi(2t-n)}{\pi(2t-n)} \mathrm{d}t = \frac{1}{2n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

3. 证明：Gauss 函数 $f(t) = \mathrm{e}^{-at^2}$ 不可能是 $L^2(\mathbf{R})$ 的任一 OMRA 的生成元.

4. 设 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 分别是 Haar 尺度函数与小波函数，尺度空间 V_j 和小波空间 W_j 分别由 $\{2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 与 $\{2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 生成. 考虑

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k \varphi(2t-k) \in V_1,$$

其中 $a_k \in \mathbf{R}$. 证明：若 $f(t)$ 与任一 $\varphi(t-n) \in V_0$ 都正交($n \in \mathbf{Z}$)，则

$$a_{2k} = -a_{2k+1}, \quad \forall k \in \mathbf{Z},$$

且 $f(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_{2k}\psi(t-k) \in W_0$.

5. 补充条件"$\varphi(t) \in L^1(\mathbf{R})$"，证明：连续标准化条件(3.12)和离散标准化条件(3.13).

6. 设 $\psi(t)$ 是由(3.38)式定义的正交小波，证明：$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\mathrm{d}t = 0$.

7. 设 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 OMRA，尺度函数与小波分别为 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$. 已知 P_j 是 $L^2(\mathbf{R})$ 到 V_j 上的正交投影算子，Q_j 是 $L^2(\mathbf{R})$ 到 W_j 上的正交投影算子，证明：$\forall j \in \mathbf{Z}$，恒有 $P_{j+1} - P_j = Q_j$.

8. 条件如上题，设 $\varphi_{jk}(t)$ 与 $\psi_{jk}(t)$ 分别是 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 的二进伸缩与整数平移系. 对于 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$，令

$$f_m(t) = \sum_{-\infty}^{m-1} \sum_{k\in\mathbf{Z}} \langle f(t), \psi_{jk}(t)\rangle \psi_{jk}(t),$$

证明：$\forall m, k \in \mathbf{Z}$，恒有

(1) $\langle f_m(t), \varphi_{mk}(t)\rangle = \langle f(t), \varphi_{mk}(t)\rangle$;

(2) $P_m f(t) = f_m(t)$.

9. 设 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 OMRA，逼近算子 P_j 与细节算子 Q_j 的定义如(3.42)和(3.43)式. 又设 $f(t) \in C_c^0(\mathbf{R})$. 证明：

(1) $\lim\limits_{j\to+\infty} \|P_j f - f\|_2 = 0$;

(2) $\lim\limits_{j\to-\infty} \|P_j f\|_2 = 0$.

10. 设 $S \subset L^2(\mathbf{R})$，$\hat{S} = \{\hat{f}(\omega) \mid f(t) \in S\}$. 对于 $j \in \mathbf{Z}$，令 W_j 是 V_j 在 V_{j+1} 中的正交补，即 $W_j = V_j^{\perp}$ 且 $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$，证明：

$$\hat{V}_{j+1} = \hat{V}_j \oplus \hat{W}_j.$$

11. 设 $\varphi(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 满足双尺度方程 $\varphi(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k \varphi(2t-k)$，证明：如

果$\{\varphi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$构成$L^2(\mathbf{R})$中的一个标准正交系，那么$\forall m,n\in\mathbf{Z}$，恒有

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}[h_{m-2k}\overline{h}_{n-2k}+(-1)^{m+n}h_{1-m+2k}\overline{h}_{1-n+2k}]=2\delta_{mn}.$$

12. 设$\varphi(t)\in L^2(\mathbf{R})$，且$\{\varphi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$构成$L^2(\mathbf{R})$中的一个标准正交系，而$\varphi(t)$满足双尺度方程$\varphi(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\varphi(2t-k)$. 又设

$$\psi(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}(-1)^k\overline{h}_{1-k}\varphi(2t-k),$$

且$\varphi_{jk}(t)$与$\psi_{jk}(t)$分别是$\varphi(t)$和$\psi(t)$的二进伸缩与整数平移系. 证明：

$$\varphi_{jk}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}[h_{k-2n}\varphi_{j-1,n}(t)+(-1)^k h_{1-k+2n}\psi_{j-1,n}(t)].$$

13. 设$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$是$L^2(\mathbf{R})$的一个OMRA，尺度函数与小波分别为$\varphi(t)$和$\psi(t)$，双尺度方程为

$$\varphi(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\varphi(2t-k),$$

$$\psi(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}(-1)^k\overline{h}_{1-k}\varphi(2t-k).$$

已知$\psi(t)$是小波子空间列$\{W_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$的生成元，证明：

(1) $W_0\perp V_0$；

(2) $V_1=W_0\oplus V_0$.

14. 证明：Shannon 小波

$$\psi(t)=\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{\frac{\pi t}{2}}\cos\frac{3\pi t}{2}$$

是正交小波.

15. 设$\varphi(t)\in L^2(\mathbf{R})$满足$\varphi(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\varphi(2t-k)$，令

$$P(z)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k z^k,\quad 其中\ z\in\mathbf{C},$$

$$Q(z)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}(-1)^k\overline{h}_{1-k}z^k,$$

证明：若$\{\varphi(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$构成$L^2(\mathbf{R})$中的一个标准正交系，则当$|z|=1$时，有

(1) $|P(z)|^2+|P(-z)|^2=1$；

(2) $P(z)\overline{Q(z)}+P(-z)\overline{Q(-z)}=0$.

16. 对于 Haar 尺度函数$\varphi(t)$，验证上题结论的正确性.

17. 设$\varphi(t)\in L^2(\mathbf{R})$是具有紧支撑的连续函数，$\{V_j,\ j\in\mathbf{Z}\}$是由$\varphi(t)$生成的$L^2(\mathbf{R})$中的一个OMRA.

(1) 求区间[0,1]上的特征函数 $u(t)$ 在子空间 V_j 上的正交投影 $u_j(t)$.

(2) 证明：若$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t=0$，则只要 j 足够大就有$\|u-u_j\|\geqslant\frac{1}{2}$.

(3) 请解释上述结论意味着$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t\neq 0$.

18. 设$\{V_j,\ j\in\mathbf{Z}\}$是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个多分辨率分析，其生成元是“帐篷形函数”$\varphi(t)=(1-|t|)\chi_I(t)$，这里 $\chi_I(t)$ 是区间 $I=[-1,1]$ 上的特征函数.

(1) 证明：$\{V_j,\ j\in\mathbf{Z}\}$ 不是 $L^2(\mathbf{R})$ 的 OMRA.

(2) 给出 $\varphi(t)$ 在时域和频域上的双尺度方程.

(3) 请根据 $\varphi(t)$ 构造出 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 OMRA，并给出相应的低通滤波器 $H(\omega)$ 和高通滤波器 $G(\omega)$ 的解析式.

(4) 若已知上述(3)中相应的正交小波 $\psi(t)$ 具有如下展开式

$$\psi(t)=\sqrt{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_k\varphi(2t-k),$$

请导出系数$\{d_k\}$的计算公式.

19. 证明：$\nabla^m f(t)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\begin{pmatrix}m\\k\end{pmatrix}f(t-k)$，$\forall m\in\mathbf{Z}^+$.

20. 证明差分算子的 Leibnitz 公式(3.54).

21. 证明：m 阶 B-样条 $N_m(t)$ 的表示式(3.56)与(3.58)相互等价.

22. 求 4 阶 B-样条 $N_4(t)$ 的解析表示式，并计算 $N_4(t)$ 的窗口面积.

23. 设 $N_2(t)$ 为 2 阶 B-样条，对于 $j\in\mathbf{Z}$，记

$$V_j=\overline{\mathrm{span}}\{N_2(2^jt-k),\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

已知 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 到 V_j 上的投影 $P_jf(t)$ 可由插值条件 $P_jf(k/2^j)=f(k/2^j)$ ($\forall k\in\mathbf{Z}$) 来确定，并且 $P_jf(t)$ 可表示成

$$P_jf(t)=\sum_{m\in\mathbf{Z}}a_mN_2(2^jt-m),$$

试给出系数$\{a_m\}$的计算公式.

24. 对于 B-样条小波，证明：对于任意正整数 m，有

$$\hat{N}_m(\omega)=H\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{N}_m\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

其中 $\hat{N}_m(\omega)$ 是 m 阶 B-样条的 Fourier 变换，而 $H(\omega)=\cos^{m+1}(2\pi\omega)$.

第四章　Daubechies 正交小波

正交小波按照其特点可以分为两类：一类是前面已经介绍的利用 MRA 方法构造的小波 $\psi(t)$，是一个频谱 B 有限的函数，即 $\hat{\psi}(\omega)$ 具有紧支集：

$$\operatorname{supp}\hat{\psi}(\omega) \subseteq [a,b].$$

根据 Fourier 分析的理论知道，小波函数 $\psi(t)$ 不可能有紧支集. 这一类小波常常称为Meyer型小波. 另一类小波是 $\psi(t)$ 有紧支集(这时 $\hat{\psi}(\omega)$ 当然不可能有紧支集)，这种小波是由Daubechies首先构造出来的，故称为**Daubechies小波**. 本章讨论这种小波的构造.

4.1　有限双尺度方程的可解性

我们知道，构造 Meyer 型正交小波的关键是双尺度方程

$$\varphi(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} h_n \varphi(2t-n), \tag{4.1}$$

因为 $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |h_n|^2 < +\infty$，所以数列 $\{h_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 趋于零的速度对构造正交小波 $\psi(t)$ 的算法起着至关重要的作用，而且由于

$$\psi(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} (-1)^n \overline{h_{1-n}} \varphi(2t-n), \tag{4.2}$$

所以即使 $\varphi(t)$ 的支集紧，但 $\psi(t)$ 的支集也未必是紧的. 幸而，当 n 的绝对值较大时，(4.1)式右端的项属高频分量，相应的 $|h_n|$ 都很小. 因此，特别简单而且重要的是(4.1)式右端仅包含有限项的情形. 此时，只要作适当的平移变换可将双尺度方程写成

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{L} h_n \varphi(2t-n). \tag{4.3}$$

相应地，(4.2)式右端也只含有限项. 一个很自然的想法是，若能先通过另外的方法确定数列 $h_0, h_1, \cdots, h_L$(从应用的角度而言这是更重要的)，再由(4.3)式确定函数 $\varphi(t)$，而 $\varphi(t)$ 具有紧支集，且能够生成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 OMRA，则

由此构造出的正交小波 $\psi(t)$ 亦是紧支集的. 这就是 Daubechies 最先(1988年) 建立的构造紧支集正交小波的方法.

现在的问题是满足(4.3) 式的函数 $\varphi(t)$ 是否一定存在? 即对于给定的 $h_0,h_1,\cdots,h_L$，有限双尺度方程(4.3) 是否一定有解? 如何确定其解? 这里介绍一种迭代解法:

任取具有紧支集的函数 $\varphi_0(t)$ (例如上一章提到的 $N_2(t)$)，令

$$\varphi_1(t)=\sum_{n=0}^{L}h_n\varphi_0(2t-n),$$

$$\varphi_2(t)=\sum_{n=0}^{L}h_n\varphi_1(2t-n),$$

$$\cdots,$$

$$\varphi_m(t)=\sum_{n=0}^{L}h_n\varphi_{m-1}(2t-n),$$

$$\cdots.$$

若当 $m\to+\infty$ 时，$\varphi_m(t)$ 收敛到函数 $\varphi_\infty(t)$，则由上式可得

$$\varphi_\infty(t)=\sum_{n=0}^{L}h_n\varphi_\infty(2t-n),$$

即 $\varphi_\infty(t)$ 是双尺度方程(4.3) 的解. 此时我们称双尺度方程(4.3) 迭代可解. 这里的关键是:

(1) 函数列 $\{\varphi_m(t)\}$ 是否收敛，或者说迭代过程是否收敛?

(2) 如果 $\{\varphi_m(t)\}$ 收敛到 $\varphi_\infty(t)$，那么 $\varphi_\infty(t)$ 是否有紧支集? 以及 $\varphi_\infty(t)$ 能否生成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 OMRA?

本节先讨论第二个问题，第一个问题将在 4.3 节详细讨论.

首先，由于 $\varphi_0(t)=N_2(t)$，所以

$$\operatorname{supp}\varphi_0=[0,2],$$

$$\operatorname{supp}\varphi_1=\left[0,\frac{1}{2}(2+L)\right]=\left[0,\frac{2+L}{2}\right],$$

$$\operatorname{supp}\varphi_2=\left[0,\frac{1}{2}\left(\frac{2+L}{2}+L\right)\right]=\left[0,\frac{2+(2^2-1)L}{2^2}\right],$$

$$\cdots,$$

$$\operatorname{supp}\varphi_m=\left[0,\frac{2+(2^m-1)L}{2^m}\right].$$

因为 $L\geqslant 2$，所以 $\operatorname{supp}\varphi_m\subseteq[0,L]$，$m=1,2,\cdots$. 从而有 $\operatorname{supp}\varphi_\infty\subseteq[0,L]$，故 $\varphi_\infty(t)$ 具有紧支集. 事实上，我们还可证明:

定理4.1 若满足(4.3)式的尺度函数 $\varphi(t)$ 具有紧支集，则其支撑区间必为 $[0,L]$.

证 设函数 $\varphi(t)$ 的支撑区间为$[a,b]$，则函数 $\varphi(2t)$ 的支撑区间为 $\left[\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right]$，其平移函数 $\varphi(2t-n)$ 的支撑区间为$\left[\frac{a+n}{2},\frac{b+n}{2}\right]$. 当下标 n 从 0 变到 L 时，双尺度方程(4.3)右端的支撑区间为$\left[\frac{a}{2},\frac{b+L}{2}\right]$. 与左端进行比较可知$[a,b]=\left[\frac{a}{2},\frac{b+L}{2}\right]$，由此解得 $a=0$，$b=L$. ∎

现在，我们再来研究双尺度方程(4.3)的解 $\varphi(t)$ 能够生成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 OMRA 的条件.

先来讨论必要性. 设$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 OMRA，而 $\varphi(t)$ 是相应的生成元，则 $\varphi(t)$ 满足(4.1)，且有

$$|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2=1, \tag{4.4}$$

其中 $H(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega}$. 进一步，由定理 3.5 知

(1) $$\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_n\overline{h_{n-2k}}=2\delta_{0k}; \tag{4.5}$$

(2) $$\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_n=2; \tag{4.6}$$

(3) $$\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_{2n}=\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_{2n+1}=1. \tag{4.7}$$

于是，当双尺度方程(4.3)的解能成为 OMRA 中的尺度函数时，系数列$\{h_n\}$应满足的条件是(4.5),(4.6)及(4.7)式.

再来讨论双尺度方程(4.3)的解能生成 OMRA 的充分性条件. 此时，当 $n>L$ 时，$h_n=0$. 进一步，还假设$\{h_n\}$是实数列.

考虑复变量 z 的 L 次实系数多项式

$$m_0(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{L}h_nz^n,$$

则 $H(\omega)=m_0(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})$，且

$$m_0(-1)=m_0(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi})=H(\pi)=0,$$

说明 $m_0(z)$ 必有因子$(1+z)^N$(其中 N 为 $\geqslant 1$ 的正整数)，故可设

$$m_0(z)=\left(\frac{1+z}{2}\right)^NQ_N(z), \tag{4.8}$$

其中 $Q_N(z)=\sum_{j=0}^{L-N}q_jz^j$ 是一个次数为 $L-N$ 的实系数多项式.

定理4.2 设双尺度方程(4.3)的系数满足：

(1) $\sum_{n\in\mathbf{Z}} h_{2n} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} h_{2n+1} = 1$；

(2) $\sum_{n\in\mathbf{Z}} h_n \overline{h_{n-2k}} = 2\delta_{0k}$；

(3) $\sup_{|z|\leqslant 1} |Q_N(z)| < 2^{N-1}$，

则双尺度方程(4.3)迭代可解，其解连续，在标准化条件 $\hat{\varphi}(0)=1$ 下，生成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 OMRA.

这一定理的证明较繁，此处从略(参见文献[49]).

4.2 Daubechies 小波的构造

4.2.1 多项式 $m_0(z)$ 的构造

Daubechies 小波又称紧支集正交小波. 根据上一节的讨论，为了构造这类紧支集正交小波 $\psi(t)$，需要先确定满足定理 4.2 的条件的实数列 h_0，$h_1,\cdots,h_L$ 或者 $H(\omega)$，这又归结于确定多项式 $Q_N(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})$. 那么，这样的 $Q_N(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})$ 是否一定存在? 如何构造? 下面我们来解决这个问题.

定理4.3 (Bezout 定理) 设 $u_1(y),u_2(y)$ 是两个没有公共根，且次数分别为 n_1,n_2 的多项式，则必存在唯一的次数分别不超过 n_2-1,n_1-1 的多项式对 $U_1(y)$ 与 $U_2(y)$，使得

$$u_1(y)U_1(y)+u_2(y)U_2(y)=1.$$

证 见文献[114]的附录 A. ∎

现在，因为 $|Q_N(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})|^2$ 可表示为 $\cos\omega$ 的多项式，从而可表示为

$$\sin^2\frac{\omega}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\omega)$$

的多项式，这就是说存在代数多项式 $P(y)$，使得 $|Q_N(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})|^2 = P\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)$.

由(4.4)及(4.8)式，得

$$\begin{aligned}1 &= |H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2\\ &= \left(\cos^2\frac{\omega}{2}\right)^N P\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)+\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)^N P\left(\cos^2\frac{\omega}{2}\right).\end{aligned}$$

令 $y=\sin^2\frac{\omega}{2}\in[0,1]$，则上式变为

$$(1-y)^N P(y)+y^N P(1-y)=1, \tag{4.9}$$

于是，问题又归结为满足上式的多项式 $P(y)$ 是否存在.

注意到$(1-y)^N$ 与y^N 是互质的N 次多项式，根据定理 4.3，存在唯一的次数不超过 $N-1$ 的多项式对 $U_1(y)$ 与 $U_2(y)$，使得

$$(1-y)^N U_1(y)+y^N U_2(y)=1.$$

将 y 替换成 $1-y$ 有

$$y^N U_1(1-y)+(1-y)^N U_2(1-y)=1.$$

这说明 $U_2(y)=U_1(1-y)$，故有

$$(1-y)^N U_1(y)+y^N U_1(1-y)=1.$$

可见，$P(y)=U_1(y)$ 就是满足(4.9) 的多项式. 为了求得 $U_1(y)$ 的表示式，只需利用$(1-y)^{-N}$ 在 $y=0$ 处的 Taylor 展开式，并注意到多项式 $U_1(y)$ 的次数不超过 $N-1$，于是有

$$\begin{aligned} U_1(y) &= (1-y)^{-N}\left(1-y^N U_1(1-y)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1}\binom{N+k-1}{k} y^k + O(y^N) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1}\binom{N+k-1}{k} y^k. \end{aligned}$$

上式给出了(4.9) 的显示解，也是唯一的具有最低次数的解，我们用 $P_N(y)$ 表示这个解，即令

$$P_N(y)=\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N+k-1}{k} y^k.$$

对于满足(4.9) 的更高次的多项式 $P(y)$，则有

$$(1-y)^N(P(y)-P_N(y))+y^N(P(1-y)-P_N(1-y))=0.$$

可见，$P(y)-P_N(y)$ 可被 y^N 整除，即存在多项式 $U(y)$，使得

$$P(y)-P_N(y)=y^N U(y).$$

代入上式，可得

$$U(y)+U(1-y)=0.$$

可见，$U(y)$ 关于 $y=\frac{1}{2}$ 是反对称的. 令 $R(y)=U\left(\frac{1}{2}-y\right)$，则

$$R(-y)=U\left(\frac{1}{2}+y\right)=-U\left(\frac{1}{2}-y\right)=-R(y),$$

所以 $R(y)$ 是一个奇多项式. 于是，我们有如下定理.

定理4.4 形如 $H(\omega)=\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2}\right)^N Q_N(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})$ 的实系数三角多项式满足

$$|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2=1$$

的充分必要条件是

$$|Q_N(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})|^2=P\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right), \tag{4.10}$$

其中多项式

$$P(y)=P_N(y)+y^N R\left(\frac{1}{2}-y\right),$$

$$P_N(y)=\sum_{k=0}^{N-1}\begin{bmatrix}N+k-1\\k\end{bmatrix}y^k.$$

这里的 $R(y)$ 是一个可选择的奇多项式，要求满足

$$P(y)\geqslant 0,\quad \forall y\in[0,1].$$ ∎

最简单的情形是取 $R(y)\equiv 0$，$y\in[0,1]$. 此时，$P(y)=P_N(y)$，且由(4.10)式易知，$L-N=N-1$，即 $L=2N-1$. 这就是说，$Q_N(z)$ 是复变量 z 的 $N-1$ 次多项式，而 $H(\omega)$ 的系数 $\{h_n\}$ 总共有 $2N$ 个.

进一步，关于 $|Q_N(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})|^2$ 还有下述定理.

定理4.5 对于任意自然数 $N\geqslant 2$ 和一切 $\omega\in\mathbf{R}$ 有

$$|Q_N(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})|^2\leqslant\begin{bmatrix}2N-1\\N\end{bmatrix}<2^{2N-2}.$$

证 对于 $k=0,1,\cdots,N-1$，反复利用组合公式

$$\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n-1\\k+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\k+1\end{bmatrix},$$

可得

$$\sum_{k=0}^{N-1}\begin{bmatrix}N+k-1\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2N-1\\N-1\end{bmatrix}.$$

于是，根据(4.10)式，$\forall\omega\in\mathbf{R}$，有

$$\begin{aligned}|Q_N(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})|^2&=P_N\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)=\sum_{k=0}^{N-1}\begin{bmatrix}N+k-1\\k\end{bmatrix}\sin^{2k}\frac{\omega}{2}\\&\leqslant\sum_{k=0}^{N-1}\begin{bmatrix}N+k-1\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2N-1\\N-1\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}2N-1\\N-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2N-1\\N\end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

$$< \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2N-1}\binom{2N-1}{k} = \frac{1}{2}\cdot 2^{2N-1} = 2^{2N-2}.$$ ∎

至此，多项式$|Q_N(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})|^2$因而$|H(\omega)|^2$的特征就已经完全描述清楚了. 然而，我们需要的是$Q_N(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})$本身，而不是$|Q_N(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})|^2$. 为了求解$Q_N(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})$，我们需要如下的 Riesz 引理.

定理4.6（Riesz 引理） 设$A(\omega)=\sum\limits_{n=0}^{N}a_n\cos n\omega$是一个实系数三角多项式，且$A(\omega)\geqslant 0$，$\forall\omega\in\mathbf{R}$，则存在$N$阶实系数三角多项式$B(\omega)=\sum\limits_{n=0}^{N}b_n\cos n\omega$，使得

$$A(\omega)=|B(\omega)|^2,\quad \forall\omega\in\mathbf{R}.$$

证 整个证明是构造性的. 首先，利用 Euler 公式

$$\cos n\omega=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega}),$$

多项式$A(\omega)$可表示为

$$\begin{aligned}A(\omega)&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}N\omega}\left(\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}a_{N-n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega}+a_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}N\omega}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}a_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(N+n)\omega}\right)\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}N\omega}P_A(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}),\end{aligned}$$

其中

$$P_A(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}a_{N-n}z^n+a_0z^N+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}a_nz^{N+n}$$

是复变量z的一个$2N$次多项式，因而存在$2N$个零点. 下面证明：若z_0是$P_A(z)$的零点，则$\frac{1}{z_0}$，$\overline{z_0}$，$\frac{1}{\overline{z_0}}$都是$P_A(z)$的零点.

事实上，一方面，由于$a_n\in\mathbf{R}$，所以$\overline{P_A(z)}=P_A(\overline{z})$，故$z_0$，$\overline{z_0}$同时为$P_A(z)$的零点. 另一方面，当$\omega\in\mathbf{R}$时，有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2N\omega}P_A(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}N\omega}A(-\omega)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}N\omega}A(\omega)=P_A(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}),$$

所以在单位圆$\{|z|=1\}$上，有$z^{2N}P_A(z^{-1})=P_A(z)$，根据解析函数的唯一性，在整个复平面上除去$z=0$外，恒有$z^{2N}P_A(z^{-1})=P_A(z)$. 显然$z=0$不是$P_A(z)$的零点，因此$P_A(z_0)=0$当且仅当$P_A\left(\frac{1}{z_0}\right)=0$.

不失一般性，假设$P_A(z)$有K对实根r_k与$\frac{1}{r_k}$，$k=1,2,\cdots,K$，以及J组

复根 $z_j, \frac{1}{z_j}, \overline{z_j}$ 及 $\frac{1}{\overline{z_j}}$，$j = 1,2,\cdots,J$. 当然有 $2K+4J=2N$. 于是

$$P_A(z) = \frac{1}{2}a_N \prod_{k=1}^{K}\left[(z-r_k)\left(z-\frac{1}{r_k}\right)\right]$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{J}\left[(z-z_j)\left(z-\frac{1}{\overline{z_j}}\right)(z-\overline{z_j})\left(z-\frac{1}{z_j}\right)\right].$$

易知，对于 $P_A(z)$ 的任一零点 z_0，及 $\forall \omega \in \mathbf{R}$，都有

$$\left|(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}-z_0)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}-\frac{1}{\overline{z_0}}\right)\right| = \frac{1}{|z_0|}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}-z_0|^2.$$

注意到 $A(\omega) \geqslant 0$，所以 $A(\omega) = |A(\omega)| = |P_A(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})|$. 因此

$$A(\omega) = c^2\left|\prod_{k=1}^{K}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}-r_k)\prod_{j=1}^{J}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}-z_j)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}-\overline{z_j})\right|^2,$$

其中 $c = \left(\frac{1}{2}|a_N|\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{k=1}^{K}|r_k|^{-\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{J}|z_j|^{-1}$. 由此可见，若取

$$B(\omega) = c\left|\prod_{k=1}^{K}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}-r_k)\prod_{j=1}^{J}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}-z_j)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}-\overline{z_j})\right|,$$

则 $B(\omega)$ 是形如 $\sum_{n=0}^{N} b_n \cos n\omega$ 的一个 N 阶实系数多项式，且满足

$$A(\omega) = |B(\omega)|^2, \quad \forall \omega \in \mathbf{R}.$$ ∎

综合上述讨论，可以归纳出构造紧支集正交小波的主要步骤：

(1) 选取正整数 $N \geqslant 2$ ($N=1$ 时即 Haar 小波)；

(2) 利用三角恒等式(4.10)式

$$|Q_N(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})|^2 = P_N\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)$$

解得 $Q_N(z)$ 的系数 q_n，$n=0,1,\cdots,N-1$，进而求得 $Q_N(z)$；

(3) 利用(4.8)式

$$m_0(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^N Q_N(z)$$

求出数列 $\{h_n\}$；

(4) 求出双尺度方程(4.3)的迭代解 $\varphi(t)$；

(5) 利用(4.2)式确定正交小波 $\psi(t)$.

4.2.2 计算 h_n 的方法之一

作为例子，我们利用上段所描述的方法来计算 $\{h_n\}$.

例 4.1 Daubechies 的 D4 小波 此时，$N=2$，且

$$P_2(y) = \sum_{k=0}^{1} C_{1+k}^k y^k = 1 + 2y,$$

$$Q_2(e^{i\omega}) = \sum_{n=0}^{1} q_n e^{in\omega} = q_0 + q_1 e^{i\omega}.$$

而

$$\begin{aligned}|Q_2(e^{i\omega})|^2 &= (q_0 + q_1 e^{i\omega})(q_0 + q_1 e^{-i\omega}) \\ &= q_0^2 + q_1^2 + q_0 q_1 (e^{i\omega} + e^{-i\omega}) \\ &= q_0^2 + q_1^2 + 2q_0 q_1 \cos\omega \\ &= (q_0 + q_1)^2 - 4q_0 q_1 \sin^2 \frac{\omega}{2},\end{aligned}$$

及 $P_2\left(\sin^2 \frac{\omega}{2}\right) = 1 + 2\sin^2 \frac{\omega}{2}$，欲使(4.10)成立，即

$$|Q_2(e^{i\omega})|^2 = P_2\left(\sin^2 \frac{\omega}{2}\right),$$

比较系数即得

$$(q_0 + q_1)^2 = 1, \quad q_0 q_1 = -\frac{1}{2}.$$

由此解得

$$\begin{cases} q_0 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \\ q_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} q_0 = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \\ q_1 = -\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_0 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, \\ q_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} q_0 = -\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, \\ q_1 = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

对于上述 4 组解，任取其中之一即可. 这里，我们取第一组，即

$$q_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad q_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

所以有 $Q_2(z) = \frac{1}{2}[(1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})z]$，从而有

$$\begin{aligned}m_0(z) &= \left(\frac{1+z}{2}\right)^2 Q_2(z) = \frac{1}{4}(1 + 2z + z^2)(q_0 + q_1 z) \\ &= \frac{1}{4}[q_0 + (2q_0 + q_1)z + (q_0 + 2q_1)z^2 + q_1 z^3].\end{aligned}$$

注意到

$$H(\omega) = m_0(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}) = \frac{1}{2}(h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + h_3 z^3),$$

于是，有

$$\begin{cases} h_0 = \frac{1}{2}q_0 = \frac{1}{4}(1+\sqrt{3}), \\ h_1 = \frac{1}{2}(2q_0 + q_1) = \frac{1}{4}(3+\sqrt{3}), \\ h_2 = \frac{1}{2}(q_0 + 2q_1) = \frac{1}{4}(3-\sqrt{3}), \\ h_3 = \frac{1}{2}q_1 = \frac{1}{4}(1-\sqrt{3}). \end{cases} \tag{4.11}$$

由此建立方程(4.3)，解得尺度函数 $\varphi(t)$，进而求出正交小波 $\psi(t)$，而且 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 都是紧支集的.

例 4.2 Daubechies 的 D6 小波 此时 $N=3$，易知

$$P_3(y) = \sum_{k=0}^{2} C_{2+k}^{k} y^k = 1 + 3y + 6y^2,$$

$$Q_3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}) = \sum_{n=0}^{2} q_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega} = q_0 + q_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} + q_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega}.$$

因为

$$\begin{aligned} |Q_3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})|^2 &= (q_0 + q_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} + q_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega})(q_0 + q_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} + q_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega}) \\ &= (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2) + (q_0 q_1 + q_1 q_2)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}) \\ &\quad + q_0 q_2 (\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega}) \\ &= (q_0 + q_1 + q_2)^2 - 4(q_0 q_1 + 4 q_0 q_2 + q_1 q_2)\sin^2\frac{\omega}{2} \\ &\quad + 16 q_0 q_2 \sin^4\frac{\omega}{2}, \end{aligned}$$

$$P_3\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right) = 1 + 3\sin^2\frac{\omega}{2} + 6\sin^4\frac{\omega}{2},$$

欲使(4.10)成立，即

$$|Q_3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})|^2 = P_3\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right),$$

比较系数即得

$$\begin{cases} (q_0 + q_1 + q_2)^2 = 1, \\ -4(q_0 q_1 + 4 q_0 q_2 + q_1 q_2) = 3, \\ 8 q_0 q_2 = 3. \end{cases}$$

由此可解得多组解 (q_0, q_1, q_2)，其中的一组解为

$$\begin{cases} q_0 = \dfrac{1}{4}\left(1+\sqrt{10}+\sqrt{5+2\sqrt{10}}\right), \\ q_1 = \dfrac{1}{2}(1-\sqrt{10}), \\ q_2 = \dfrac{1}{4}\left(1+\sqrt{10}-\sqrt{5+2\sqrt{10}}\right). \end{cases}$$

所以有

$$\begin{aligned} Q_3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}) = \frac{1}{4}\Big[&\left(1+\sqrt{10}+\sqrt{5+2\sqrt{10}}\right)+2(1-\sqrt{10})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} \\ &+\left(1+\sqrt{10}-\sqrt{5+2\sqrt{10}}\right)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega}\Big]. \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} m_0(z) &= \left(\frac{1+z}{2}\right)^3 Q_3(z) = \frac{1}{8}(1+3z+3z^2+z^3)(q_0+q_1z+q_2z^2) \\ &= \frac{1}{8}[q_0+(3q_0+q_1)z+(3q_0+3q_1+q_2)z^2] \\ &\quad+\frac{1}{8}[(q_0+3q_1+3q_2)z^3+(q_1+3q_2)z^4+q_2z^5]. \end{aligned}$$

与 $H(\omega)=m_0(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{5}h_kz^k$ 比较系数，得

$$\begin{cases} h_0 = \dfrac{1}{4}q_0, & h_1 = \dfrac{1}{4}(3q_0+q_1), \\ h_2 = \dfrac{1}{4}(3q_0+3q_1+q_2), & h_3 = \dfrac{1}{4}(q_0+3q_1+3q_2) \\ h_4 = \dfrac{1}{4}(q_1+3q_2), & h_5 = \dfrac{1}{4}q_2. \end{cases}$$

于是，有

$$\begin{cases} h_0 = \dfrac{1}{16}\left(1+\sqrt{10}+\sqrt{5+2\sqrt{10}}\right), \\ h_1 = \dfrac{1}{16}\left(5+\sqrt{10}+3\sqrt{5+2\sqrt{10}}\right), \\ h_2 = \dfrac{1}{16}\left(10-2\sqrt{10}+2\sqrt{5+2\sqrt{10}}\right), \\ h_3 = \dfrac{1}{16}\left(10-2\sqrt{10}-2\sqrt{5+2\sqrt{10}}\right), \\ h_4 = \dfrac{1}{16}\left(5+\sqrt{10}-3\sqrt{5+2\sqrt{10}}\right), \\ h_5 = \dfrac{1}{16}\left(1+\sqrt{10}-\sqrt{5+2\sqrt{10}}\right). \end{cases}$$

最后再解得具有紧支集的尺度函数 $\varphi(t)$ 与正交小波 $\psi(t)$.

4.2.3 计算 h_n 的方法之二

定理 4.2 列出了关于双尺度序列 $\{h_n\}$ 或多项式 $m_0(z)$ 的三个充分性条件，可保证下面一节所描述的迭代过程最终能收敛到一个尺度函数. 现在，给定一个多项式 $m_0(z)$，若令

$$H(\omega) = m_0(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}),$$

则根据函数 $H(\omega)$ 的表示式，定理 4.2 中的 3 个假设条件可表述为：

(1) $H(0) = 1$; (4.12)

(2) $|H(\omega)|^2 + |H(\omega+\pi)|^2 = 1$; (4.13)

(3) 当 $-\frac{\pi}{2} \leqslant \omega \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时，$|H(\omega)| > 0$. (4.14)

下面将描述一个由 Daubechies 推导出的多项式，它满足上述条件(4.12)～(4.14)式.

根据第三章的讨论(见例 3.1)可知，与 Haar 尺度函数 $\varphi_0(t)$ 相关的滤波器是多项式：

$$p_0(\omega) = \frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}} \cos\frac{\omega}{2}.$$

显然 $p_0(\omega)$ 满足(4.12)～(4.14)式. 但 $\varphi_0(t)$ 不是连续的. 为了构造连续的尺度函数，一种可行的方法是作卷积运算. 例如，Haar 尺度函数 $\varphi_0(t)$ 与其自身做卷积，可得下列连续线性样条：

$$\varphi_0 * \varphi_0(t) = \begin{cases} 1-|t-1|, & 0 \leqslant t \leqslant 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

注意到卷积的 Fourier 变换等于 Fourier 变换的乘积，即 $\underbrace{f * f * \cdots * f}_{n个}$ 的 Fourier 变换为 $(\hat{f})^n$，以及双尺度方程的 Fourier 变换形式，容易想到取

$$H(\omega) = (p_0(\omega))^n = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\omega}{2}} \cos^n\frac{\omega}{2} \quad (n\ 为某个正整数)$$

作为构造连续尺度函数的一个多项式. 遗憾的是，当 $n > 1$ 时，$H(\omega)$ 并不满足性质(4.13).

另一种可行的方法是把恒等式

$$\cos^2\frac{\omega}{2} + \sin^2\frac{\omega}{2} = 1$$

两边同时取 n 次幂. 为简单起见，考虑 $n = 3$ 的情形，此时有

$$\left(\cos^2\frac{\omega}{2} + \sin^2\frac{\omega}{2}\right)^3 = 1, \tag{4.15}$$

或者

$$\cos^6\frac{\omega}{2}+3\cos^4\frac{\omega}{2}\sin^2\frac{\omega}{2}+3\cos^2\frac{\omega}{2}\sin^4\frac{\omega}{2}+\sin^6\frac{\omega}{2}=1.$$

若取

$$|H(\omega)|^2=\cos^6\frac{\omega}{2}+3\cos^4\frac{\omega}{2}\sin^2\frac{\omega}{2}, \tag{4.16}$$

则 $H(\omega)$ 满足条件(4.12) 与(4.13)，即 $H(0)=1$，且有

$$|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2=1.$$

因为当 $|\omega|\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，

$$\cos\frac{\omega}{2}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}},\quad |H(\omega)|\geqslant\cos^3\frac{\omega}{2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{4}>0,$$

所以性质(4.14) 亦满足. 剩下的问题是如何由 $|H(\omega)|$ 确定 $H(\omega)$ 本身了.

首先，根据 $|H(\omega)|$ 的定义(4.16) 式，得

$$\begin{aligned}|H(\omega)|^2&=\cos^4\frac{\omega}{2}\left(\cos^2\frac{\omega}{2}+3\sin^2\frac{\omega}{2}\right)\\&=\cos^4\frac{\omega}{2}\left|\cos\frac{\omega}{2}+i\sqrt{3}\sin\frac{\omega}{2}\right|^2,\end{aligned}$$

将上式两边开方，可取

$$H(\omega)=\cos^2\frac{\omega}{2}\left(\cos\frac{\omega}{2}+\mathrm{i}\sqrt{3}\sin\frac{\omega}{2}\right)\alpha(\omega), \tag{4.17}$$

这里的 $\alpha(\omega)$ 是一个待定的复值函数，满足 $|\alpha(\omega)|=1$.

现在来确定 $\alpha(\omega)$. 利用 Euler 公式，上述 $H(\omega)$ 的第一个因子为

$$\cos^2\frac{\omega}{2}=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}+2+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}),$$

第二个因子为

$$\cos\frac{\omega}{2}+\mathrm{i}\sqrt{3}\sin\frac{\omega}{2}=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\omega}{2}}+\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\omega}{2}}+\sqrt{3}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\omega}{2}}-\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\omega}{2}}),$$

可见，只要选取 $\alpha(\omega)=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}3\omega}{2}}$，既可满足 $|\alpha(\omega)|=1$，又能避免 $H(\omega)$ 中出现 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}$ 的分数次幂. 将这些式子一并代入(4.17) 式并整理，得

$$H(\omega)=\frac{1+\sqrt{3}}{8}+\frac{3+\sqrt{3}}{8}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}+\frac{3-\sqrt{3}}{8}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega}+\frac{1-\sqrt{3}}{8}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\omega}.$$

亦即

$$m_0(z)=\frac{1+\sqrt{3}}{8}+\frac{3+\sqrt{3}}{8}z+\frac{3-\sqrt{3}}{8}z^2+\frac{1-\sqrt{3}}{8}z^3.$$

最后，比较 $m_0(z)=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_n z^n$ 中的系数，得

$$h_0=\frac{1+\sqrt{3}}{4},\quad h_1=\frac{3+\sqrt{3}}{4},\quad h_2=\frac{3-\sqrt{3}}{4},\quad h_3=\frac{1-\sqrt{3}}{4}.$$

这与前面例 4.1 的计算结果(4.11) 是一致的.

4.3 二进点上的尺度函数

我们在后续章节将会看到，在小波分解和重构算法中双尺度系数列 $\{h_n\}$ 是重要的，而尺度函数 $\varphi(t)$ 并没有直接进入到算法中，这就是说从应用的角度而言无需具体求出 $\varphi(t)$. 但为了确定 $\varphi(t)$ 的一些性质(如连续性等)，计算出 $\varphi(t)$ 的近似值还是有价值的. 尽管 4.1 节已经给出了计算 $\varphi(t)$ 的迭代方法，但从具体计算的角度看，该方法还是有些繁琐. 计算尺度函数 $\varphi(t)$ 的一个更有效的方法是，根据已经得到的双尺度系数 $\{h_k\}$，利用双尺度方程 (4.3)，以及标准化条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t=1, \tag{4.18}$$

计算 $\varphi(t)$ 在各个二进点 $t=\frac{l}{2^n}$ 上的值(这里，$l\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{Z}^+$).

下面通过一个具体的计算过程来说明. 为简单起见，考察 $N=2$ 时的 Daubechies 小波，此时双尺度系数 h_k 只有 4 个非零(见(4.11) 式)，而双尺度方程(4.3) 式即为

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{3}h_k\varphi(2t-k), \tag{4.19}$$

所以计算过程将比较简单.

第 1 步 计算 $\varphi(t)$ 在各个整数点上的值.

为方便起见，记 $\varphi_l=\varphi(l)$，$l\in\mathbf{Z}$. 因为 $N=2$ 时的 Daubechies 尺度函数仅在区间 $0<t<3$ 上非零，所以 $\varphi_0=\varphi(0)=0$，$\varphi_3=\varphi(3)=0$. 于是，对于 $l\in\mathbf{Z}$，只要 $l\neq 1,2$，都有 $\varphi_l=0$. 故只需计算 φ_1,φ_2. 为此，在双尺度方程(4.19) 中，分别取 $t=1,2$，得

$$\varphi_1=\sum_{k=0}^{3}h_k\varphi(2-k)=h_0\varphi_2+h_1\varphi_1,$$

$$\varphi_2=\sum_{k=0}^{3}h_k\varphi(4-k)=h_2\varphi_2+h_3\varphi_1.$$

上述两个等式可用矩阵形式表示为

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_1 & h_0\\ h_3 & h_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}.$$

由此可见，$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$是矩阵$\begin{pmatrix}h_1 & h_0\\ h_3 & h_2\end{pmatrix}$的属于特征值$\lambda=1$的特征向量，故只需解齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix}h_1-1 & h_0\\ h_3 & h_2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

即可. 因为$\{h_k\}$满足(4.7)式，即$\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}h_{2k+1}=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}h_{2k}=1$，所以上述方程组只有一个独立方程，不妨取其中的第一个，即

$$(h_1-1)\varphi_1+h_0\varphi_2=0.$$

注意到此时的标准化条件(4.18)式即$\sum\limits_{l\in\mathbf{Z}}\varphi_l=1$，于是有

$$\varphi_1+\varphi_2=1. \tag{4.20}$$

联立以上两式，即可解得

$$\varphi_1=\frac{h_0}{1+h_0-h_1}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\approx 1.366,$$

$$\varphi_2=\frac{1-h_1}{1+h_0-h_1}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\approx -0.366.$$

至此，$\varphi(t)$在所有整数点上的值，即$\varphi_l=\varphi(l)$，$l\in\mathbf{Z}$已完全确定.

第2步 计算$\varphi(t)$在半整数点上的值.

为了计算$\varphi\left(\frac{l}{2}\right)$，$l\in\mathbf{Z}$，在双尺度方程(4.19)中，取$t=\frac{l}{2}$，得

$$\varphi\left(\frac{l}{2}\right)=\sum_{k=0}^{3}h_k\varphi(l-k). \tag{4.21}$$

因为$\varphi(l-k)$的值已在第1步确定，所以由上式可计算出$\varphi\left(\frac{l}{2}\right)$的值. 又当$t\leqslant 0$或$t\geqslant 3$时$\varphi(t)=0$，以及$l=2,4$时，$\varphi\left(\frac{l}{2}\right)$分别等于$\varphi_1,\varphi_2$，这也已在第1步确定，故只需计算$l=1,3,5$时$\varphi\left(\frac{l}{2}\right)$的值. 于是，由(4.21)式依次可得

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=h_0\varphi_1=\frac{(1+\sqrt{3})^2}{8}=\frac{2+\sqrt{3}}{4},$$

$$\varphi\left(\frac{3}{2}\right)=h_1\varphi_2+h_2\varphi_1=0,$$

$$\varphi\left(\frac{5}{2}\right)=h_3\varphi_2=\frac{(1-\sqrt{3})^2}{8}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

这时，标准化条件(4.18)式意味着$\sum\limits_{l\in\mathbf{Z}}\varphi\left(\frac{l}{2}\right)=2$. 下面证明之. 其实，根据(4.21)式，有

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}}\varphi\left(\frac{l}{2}\right)=\sum_{l\in\mathbf{Z}}\sum_{k=0}^{3}h_k\varphi(l-k)=\sum_{k=0}^{3}h_k\left(\sum_{l\in\mathbf{Z}}\varphi(l-k)\right).$$

利用第1步的结果，上式右端里层的和式

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}}\varphi(l-k)=\sum_{l\in\mathbf{Z}}\varphi(l)=1.$$

再由(4.6)式，$\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}h_k=2$，因此$\sum\limits_{l\in\mathbf{Z}}\varphi\left(\frac{l}{2}\right)=2$.

第3步 迭代.

为了计算$\varphi(t)$在$\frac{1}{4}$整数点处的值$\varphi\left(\frac{l}{4}\right)$，可由$\varphi(t)$在半整数点的值，并在双尺度方程$\varphi(t)=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}h_k\varphi(2t-k)$中令$t=\frac{l}{4}$时得到.

一般地，一旦得到了$\varphi(t)$在$t=\frac{l}{2^{n-1}}$处的值，其在$t=\frac{l}{2^n}$时的值可由双尺度方程(4.3)式得到：

$$\varphi\left(\frac{l}{2^n}\right)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\varphi\left(\frac{l}{2^{n-1}}-k\right)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\varphi\left(\frac{l-2^{n-1}k}{2^{n-1}}\right).$$

等式右边是在上一步中已得到的$\varphi(t)$在$t=\frac{l}{2^{n-1}}$处的值.

如此继续下去，就得到$\varphi(t)$在所有二进点$t=\frac{l}{2^n}$上的值(这里，$l\in\mathbf{Z}$，$n\in\mathbf{Z}^+$). 随着n的增加，二进点集$\left\{\frac{l}{2^n},\ l\in\mathbf{Z}\right\}$变得越来越密集. 因为任何实数都是某个二进点列的极限，而且由于 Daubechies 尺度函数是连续的，所以$\varphi(t)$在任何点t处的值均可通过求$\varphi\left(\frac{l}{2^n}\right)$的极限来获得.

第4步 证明$\varphi(t)$满足标准化条件.

首先证明第n次迭代值$\varphi\left(\frac{l}{2^n}\right)$对应的标准化条件(4.18)式为

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}}\varphi\left(\frac{l}{2^n}\right)=2^n. \tag{4.22}$$

对 n 用数学归纳法. 由第 1 步和第 2 步知，(4.22) 式对 $n=0$ 和 $n=1$ 成立. 现假设(4.22) 式对 $n-1$ 成立，即

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}}\varphi\left(\frac{l}{2^{n-1}}\right)=2^{n-1}, \tag{4.23}$$

再证明(4.22) 式对 n 亦成立. 因为

$$\begin{aligned}\sum_{l\in\mathbf{Z}}\varphi\left(\frac{l}{2^n}\right)&=\sum_{l\in\mathbf{Z}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\varphi\left(\frac{l-2^{n-1}k}{2^{n-1}}\right)\\&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\sum_{l\in\mathbf{Z}}\varphi\left(\frac{l-2^{n-1}k}{2^{n-1}}\right)\quad(\text{交换求和顺序})\\&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\sum_{m\in\mathbf{Z}}\varphi\left(\frac{m}{2^{n-1}}\right)\quad(\text{令 } m=l-2^{n-1}k),\end{aligned}$$

所以由归纳假设(4.23) 式，有

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}}\varphi\left(\frac{l}{2^n}\right)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k2^{n-1}=2^{n-1}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k.$$

因为 $\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k=2$ (见(4.6) 式)，所以上式右边等于 2^n.

然后证明，用这种迭代方式构造的尺度函数 $\varphi(t)$(亦即 $\varphi(t)$ 是 $\varphi\left(\frac{l}{2^n}\right)$的极限) 满足标准化条件(4.18)式. 为此，考虑 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ 所对应的Riemann和的极限，这只需用点列 $\left\{t_l=\frac{l}{2^n},\ l\in\mathbf{Z}\right\}$ 对无穷区间$(-\infty,+\infty)$ 进行划分，划分宽度都取 $\Delta t=\frac{1}{2^n}$. 于是有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\sum_{l\in\mathbf{Z}}\varphi(t_l)\Delta t=\lim_{n\to+\infty}\sum_{l\in\mathbf{Z}}\varphi\left(\frac{l}{2^n}\right)\frac{1}{2^n}.$$

因为 $\sum_{k\in\mathbf{Z}}\varphi\left(\frac{l}{2^n}\right)=2^n$ (见(4.22) 式)，所以上式右边等于 1. ∎

4.4 消失矩和光滑性

消失矩是小波的一个重要特性. 在连续小波变换中，具有高阶消失矩的小波相当于一个多尺度微分算子的作用，可以揭示出函数的可微性与其小波变换在细尺度下的衰减性之间的关系.

4.4.1 消失矩的概念

定义 4.1 对于基本小波 $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$，如果

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) \mathrm{d}t = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant m-1, \tag{4.24}$$

则称 $\psi(t)$ 具有 **m 阶消失矩.**

显然 $m=1$ 时，有 $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \mathrm{d}t = 0$，即 $\hat{\psi}(0)=0$. 这正是可允许条件(2.5)对小波的基本要求. 所以，基本小波 $\psi(t)$ 至少应该有一阶消失矩.

一般而言，如果一个小波有 m 阶消失矩，那么对应的滤波器长度不能小于 $2m$. 例如，Daubechies 小波、双正交小波、Coiflet 小波、Symlet 小波等都具有较高阶的消失矩.

根据定义，若小波 $\psi(t)$ 具有 m 阶消失矩，则任一次数小于 m 的多项式 $p(t)$ 与 $\psi(t)$ 的内积都等于零，或者说 $p(t)$ 与 $\psi(t)$ 正交.

现在，设 $\psi(t)$ 的 Fourier 变换

$$\hat{\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t \tag{4.25}$$

具有直到 $m-1$ 阶连续导数，则当 $0 \leqslant k < m$ 时，有

$$\hat{\psi}^{(k)}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-\mathrm{i}t)^k \psi(t) \mathrm{d}t. \tag{4.26}$$

另一方面，注意到公式(3.25),(3.37)，即

$$G(\omega) = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} \overline{H(\omega+\pi)},$$

$$\hat{\psi}(2\omega) = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} \overline{H(\omega+\pi)} \hat{\varphi}(\omega).$$

由此可立即得到以下结论：

定理4.7 设小波 $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 的 Fourier 变换 $\hat{\psi}(\omega)$ 在 $\omega=0$ 处具有直到 $m-1$ 阶连续导数，则以下命题是相互等价的：

(1) $\psi(t)$ 具有 m 阶消失矩，即(4.24)式成立.

(2) $\hat{\psi}(\omega)$ 在 $\omega=0$ 处有 m 重零点，即

$$\psi^{(k)}(0) = 0 \quad (0 \leqslant k < m). \tag{4.27}$$

(3) $H(\omega)$ 在点 $\omega=\pi$ 处有 m 重零点，即

$$H^{(k)}(\pi) = 0 \quad (0 \leqslant k < m).$$

下面的命题表明，具有 m 阶消失矩的小波可以表示成一个可微函数的 m 阶导数，因而相应的小波变换是一个多尺度微分算子.

定理4.8 设小波 $\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 是快速衰减的，即对于任意衰减指数 $n\in\mathbf{Z}^+$，存在正常数 C_n，使得

$$|\psi(t)|\leqslant\frac{C_n}{1+|t|^n},\quad \forall t\in\mathbf{R},\tag{4.28}$$

则 $\psi(t)$ 具有 m 阶消失矩的充分必要条件是存在快速衰减的函数 $\theta(t)$，使得

$$\psi(t)=(-1)^m\frac{\mathrm{d}^m\theta(t)}{\mathrm{d}t^m},\tag{4.29}$$

从而任一 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 的小波变换 $W_f(a,b)$ 都可表示为

$$W_f(a,b)=a^m\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}b^m}(f*\overline{\theta_a})(b),\tag{4.30}$$

其中 $\overline{\theta_a}(t)=\overline{\frac{1}{\sqrt{|a|}}\theta\left(-\frac{t}{a}\right)}$，并且 $\psi(t)$ 具有不超过 m 阶的消失矩当且仅当 $\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(t)\mathrm{d}t\neq 0$.

证 首先由(4.25)及(4.28)式易知，$\psi(t)$ 的快速衰减性蕴含着 $\hat{\psi}(\omega)\in C^\infty(\mathbf{R})$，因此有

$$\hat{\psi}^{(k)}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}(-\mathrm{i}t)^k\psi(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t,\quad \forall k\in\mathbf{Z}^+.\tag{4.31}$$

必要性. 由于 $\psi(t)$ 具有 m 阶消失矩，根据定理4.7知(4.27)式成立，所以 $\hat{\psi}(\omega)$ 可分解为

$$\hat{\psi}(\omega)=(-\mathrm{i}\omega)^m\hat{\theta}(\omega),\tag{4.32}$$

其中 $\hat{\theta}(\omega)$ 是有界函数. 令 $\theta(t)$ 是 $\hat{\theta}(\omega)$ 的 Fourier 逆变换，根据 $\psi(t)$ 的快速衰减性并利用(4.25)及(4.28)式易知，$\theta(t)$ 是快速衰减的. 把(4.32)式改写成

$$\hat{\psi}(\omega)=(-1)^m[(\mathrm{i}\omega)^m\hat{\theta}(\omega)]=(-1)^mF\left(\frac{\mathrm{d}^m\theta(t)}{\mathrm{d}t^m}\right),$$

由此即得(4.29)式.

充分性. 因为 $\theta(t)$ 是快速衰减的，所以

$$|\hat{\theta}(\omega)|\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|\theta(t)|\mathrm{d}t<+\infty.$$

对(4.29)式作 Fourier 变换可得(4.32)式，因而有(4.27)式成立，即 $\psi(t)$ 具有 m 阶消失矩.

进一步，利用(4.31)及(4.32)式有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}t^m\psi(t)\mathrm{d}t=\mathrm{i}^m\hat{\psi}^{(m)}(0)=(-\mathrm{i})^m m!\,\hat{\theta}(0),$$

所以 $\psi(t)$ 没有高于 m 阶的消失矩当且仅当 $\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(t)\mathrm{d}t \neq 0$.

此外，小波变换用卷积表示即

$$W_f(a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\overline{\psi\Big(\frac{t-b}{a}\Big)}\,\mathrm{d}t = f * \overline{\psi_a}(b), \tag{4.33}$$

其中 $\overline{\psi_a}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\overline{\psi\Big(-\frac{t}{a}\Big)}$. 根据(4.29)式可得

$$\overline{\psi_a}(t) = a^m \frac{\mathrm{d}^m \overline{\theta_a}(t)}{\mathrm{d}t^m}.$$

交换卷积与微分的运算次序，可得

$$W_f(a,b) = a^m\Big(f * \frac{\mathrm{d}^m \overline{\theta_a}}{\mathrm{d}t^m}\Big)(b) = a^m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}b^m}(f * \overline{\theta_a})(b). \qquad \blacksquare$$

关于消失矩的特性还有不少有用的结论. 例如，如果函数 $f(t)$ 具有 Hölder 正则性，且小波 $\psi(t)$ 具有足够高阶的消失矩，那么在细尺度 j 上小波系数的幅值 $|\langle f,\psi_{jk}\rangle|$ 是很小的(参见文献[103]).

由此可见，小波的消失矩特性本质上决定了该小波逼近光滑函数的能力，小波的消失矩阶数越高，光滑函数在小波展开式中的零元就越多(实际小波变换中，严格为零的小波系数也很少，但大多数小波系数都可在一定精度要求下被看做零元). 这就是小波能够广泛用于数据压缩与快速数值计算的根本原因.

4.4.2 Daubechies 小波的消失矩

现在，我们讨论 Daubechies 正交小波的消失矩和光滑性.

一个值得注意的事实是，Daubechies 发现(见文献[49])，对任意的正整数 N，都存在 $2N$ 个非零的实的尺度系数 $h_0,h_1,\cdots,h_{2N-1}$，由此可以构造出支撑区间为 $[0,2N-1]$ 的尺度函数和小波函数. 为方便起见，我们把本章 4.1 ~ 4.2 节中的符号 $m_0(z)$ 改记为

$$m_N(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2N-1} h_k z^k,$$

相应地，分解式(4.8)也调整为

$$m_N(z) = (z+1)^N Q_N(z), \tag{4.34}$$

这里 $Q_N(z)$ 的次数为 $N-1$，且 $Q_N(-1) \neq 0$.

例如，$N=1$ (Haar) 和 $N=2$ (Daubechies) 时，相应的多项式分别为

$$m_1(z) = \frac{1}{2}(1+z)^1,$$

$$m_2(z)=(1+z)^2\left(\frac{1+\sqrt{3}}{8}+\frac{1-\sqrt{3}}{8}z\right).$$

根据(4.34)式的因式分解，有

$$Q_1(z)=\frac{1}{2},\quad Q_2(z)=\frac{1+\sqrt{3}}{8}+\frac{1-\sqrt{3}}{8}z.$$

由 $m_N(z)$ 构造的尺度函数 $\varphi_N(t)$ 和小波 $\psi_N(t)$ 均有以无限乘积形式给出的 Fourier 变换. 事实上，因为 $m_N(z)$ 的系数是实的，且

$$\overline{m_N(-z)}=m_N(-\bar{z}),$$

所以由(3.17)和(3.37)式有

$$\hat{\varphi}_N(\omega)=\prod_{j=1}^{+\infty}m_N(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2^j}}),\tag{4.35}$$

$$\hat{\psi}_N(\omega)=-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}m_N(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})\hat{\varphi}_N\left(\frac{\omega}{2}\right).\tag{4.36}$$

因为 $m_N(-1)=0$，所以 $\hat{\psi}_N(0)=0$. 对于 $N>1$，易知 $m'_N(-1)=0$，所以也有 $\hat{\psi}'_N(0)=0$. 不难证明：

$$\hat{\psi}_N^{(k)}(0)=\begin{cases}0, & k=0,\cdots,N-1,\\ -N!\left(\frac{-\mathrm{i}}{2}\right)^N Q_N(-1)\neq 0, & k=N.\end{cases}\tag{4.37}$$

由此容易得到如下结论.

定理4.9 Daubechies 小波 $\psi_N(t)$ 具有 N 阶消失矩，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}t^k\psi_N(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & k=0,1,\cdots,N-1,\\ -\frac{N!}{2^N}Q_N(-1), & k=N.\end{cases}\tag{4.38}$$

证 根据 Fourier 变换的微分性质，可知

$$F(t^kf(t))(\omega)=\mathrm{i}^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\omega^k}F(f(t))(\omega).$$

再令 $f(t)=\psi_N(t)$，$\omega=0$，并利用(4.37)式即可得证. ∎

Daubechies 小波可根据其消失矩的阶数来分类. 尺度函数和小波函数的光滑性随消失矩的阶数增加而增加. $N=1$ 时即 Haar 小波，其尺度函数和小波函数不连续. $N=2$ 时的 Daubechies 尺度函数和小波函数是连续的，但是显然没有光滑的导数. $N=3$ 时，小波函数和尺度函数均连续可微. 当 N 增大时，$\varphi_N(t)$ 和 $\psi_N(t)$ 连续可导的阶数大约为 $\frac{N}{5}$. 所以，为了10次连续可导，需要取 $N\approx 50$.

表 4-1 列出了 Daubechies 小波的近似尺度系数(N 为 1 ~ 4)，其中 $N=2$ 时就是(4.11) 式中给出的系数的近似值.

表 4-1 **具有 1 ~ 4 阶消失矩的 Daubechies 小波的尺度系数**

尺度系数 h_k	消失矩的阶数			
	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$
h_0	1	0.683 013	0.470 467	0.325 803
h_1	1	1.183 013	1.141 117	1.010 946
h_2	0	0.316 987	0.650 365	0.892 200
h_3	0	−0.183 013	−0.190 934	−0.039 575
h_4	0	0	−0.120 832	−0.264 507
h_5	0	0	0.049 817	0.043 616
h_6	0	0	0	0.023 252
h_7	0	0	0	−0.014 987

在小波的许多应用领域，例如图像压缩、信号去噪与奇异性检测等，消失矩是一个重要参数. 下面以 $N=2$ 为例，详细分析消失矩在计算小波系数中的应用.

根据(4.38) 式，当 $N=2$ 时，$\psi_2(t)$ 的前两阶($k=0,1$) 矩消失，第 3 阶($k=2$) 矩为 $-\frac{1}{2}Q_2(-1)$. 由前面的讨论可知，

$$Q_2(-1)=\frac{1+\sqrt{3}}{8}-\frac{1-\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

这样，$\psi_2(t)$ 的第 3 阶矩等于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\psi_2(t)\mathrm{d}t=-\frac{\sqrt{3}}{8}. \tag{4.39}$$

我们想用这些矩来逼近光滑函数的小波系数. 可以发现，当 j 变大时，这些系数是很小的. 若 $f(t)$ 是光滑且二阶连续可微的，那么其 j,k 阶小波系数为

$$\begin{aligned}C_f(j,k)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)2^{\frac{j}{2}}\psi_2(2^jt-k)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{3\cdot 2^{-j}}f(t+2^{-j}k)2^{\frac{j}{2}}\psi_2(2^jt)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

可见，若 j 充分大，则积分区间足够小. 利用 $f(t+2^{-j}k)$ 在点 $t_0=2^{-j}k$ 处的二阶 Taylor 展开式，有

$$f(t+2^{-j}k)\approx f(2^{-j}k)+tf'(2^{-j}k)+\frac{t^2}{2}f''(2^{-j}k),$$

于是，得到 $C_f(j,k)$ 的近似式为

$$C_f(j,k) \approx \int_0^{3\cdot 2^{-j}} \left(f(2^{-j}k) + tf\,'(2^{-j}k) + \frac{1}{2}t^2 f\,''(2^{-j}k)\right) 2^{\frac{j}{2}} \psi_2(2^j t)\,\mathrm{d}t. \tag{4.40}$$

我们看到，右边的积分只需计算 $\psi_2(t)$ 的前三个矩的积分. 因为前两阶矩消失了(为零)，第3阶矩如(4.39)式所示，所以可得到最终的结果，即第 j,k 阶小波系数的近似值为

$$C_f(j,k) \approx -\frac{\sqrt{3}}{16} 2^{-\frac{5j}{2}} f''(2^{-j}k).$$

4.5 Coiflet 正交小波

我们知道，Daubechies 小波具有高阶消失矩，但对应的尺度函数没有这种特性. R. Coifman 在 1989 年提出这样的想法：能不能让尺度函数 $\varphi(t)$ 也具有 $\psi(t)$ 那样的消失矩特性？但是要保证双尺度方程有解，$H(0) \neq 0$，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \neq 0.$$

所以 $\varphi(t)$ 是无法获得一阶消失矩的，于是只好考虑 $\varphi(t)$ 的高阶消失矩. 这就是说，我们希望 $\psi(t)$ 和 $\varphi(t)$ 同时满足以下条件：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad (k = 0,1,\cdots,N-1), \tag{4.41}$$

且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1, \tag{4.42}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad (k = 1,2,\cdots,N-1). \tag{4.43}$$

Daubechies 研究了这类小波的构造，并命名为 N 阶 **Coiflet 小波**.

为了构造具有紧支集的 N 阶 Coiflet 正交小波，我们需要弄清

$$H(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}$$

应该满足什么条件.

首先，条件(4.41) ～ (4.43) 依次等价于

$$\hat{\psi}^{(k)}(0) = 0 \quad (k = 0,1,\cdots,N-1), \tag{4.44}$$

$$\hat{\varphi}(0) = 1, \tag{4.45}$$

$$\hat{\varphi}^{(k)}(0) = 0 \quad (k = 1,2,\cdots,N-1). \tag{4.46}$$

易知，条件(4.41)或(4.44)等价于

$$H(\omega)=\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2}\right)^N S(\omega), \tag{4.47}$$

其中 $S(\omega)$ 是一个三角多项式. 而条件(4.46)又等价于

$$H^{(k)}(0)=0 \quad (k=1,2,\cdots,N-1), \tag{4.48}$$

或者

$$H(\omega)=1+(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})^N T(\omega), \tag{4.49}$$

其中 $T(\omega)$ 是一个三角多项式.

考虑 $N=2K$，其中 K 是正整数(N 为奇数时可同理分析)，注意到

$$\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2}\right)^{2K}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}K\omega}\cos^{2K}\frac{\omega}{2},$$

$$\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2}\right)^{2K}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}K\omega}\left(2\mathrm{i}\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2K},$$

所以，条件(4.47)与(4.49)意味着必须寻找两个三角多项式 $P_1(\omega)$ 与 $P_2(\omega)$，使得

$$P_1(\omega)\cos^{2K}\frac{\omega}{2}=1+P_2(\omega)\sin^{2K}\frac{\omega}{2}.$$

根据定理 4.3 及紧随其后的讨论，容易给出 $P_1(\omega)$ 与 $P_2(\omega)$ 的一般表示式. 特别地，$P_1(\omega)$ 可表示为

$$P_1(\omega)=\sum_{k=0}^{K-1}\begin{bmatrix}K-1+k\\k\end{bmatrix}\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)^k+\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)^K f(\omega),$$

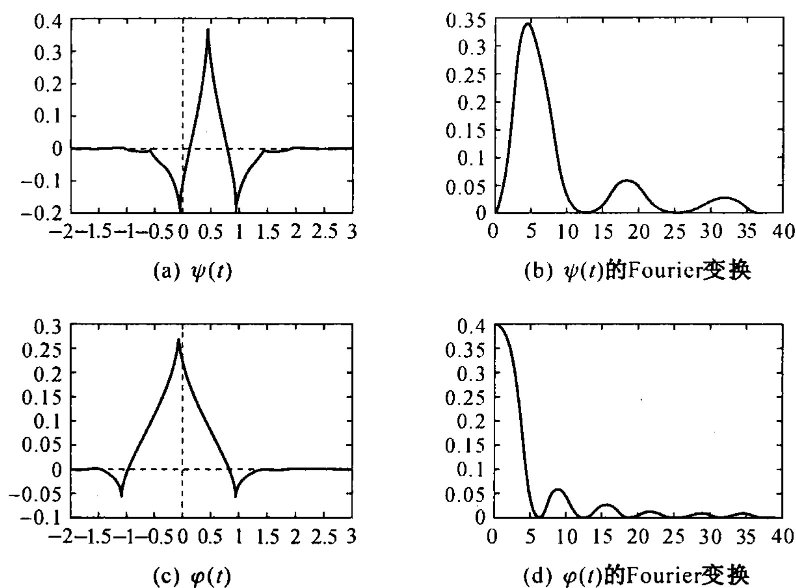
其中 $f(\omega)$ 是一个任意三角多项式，其 Taylor 展开式使得

$$H(\omega)=\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2}\right)^{2K}P_1(\omega)$$

满足

$$|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2=1.$$

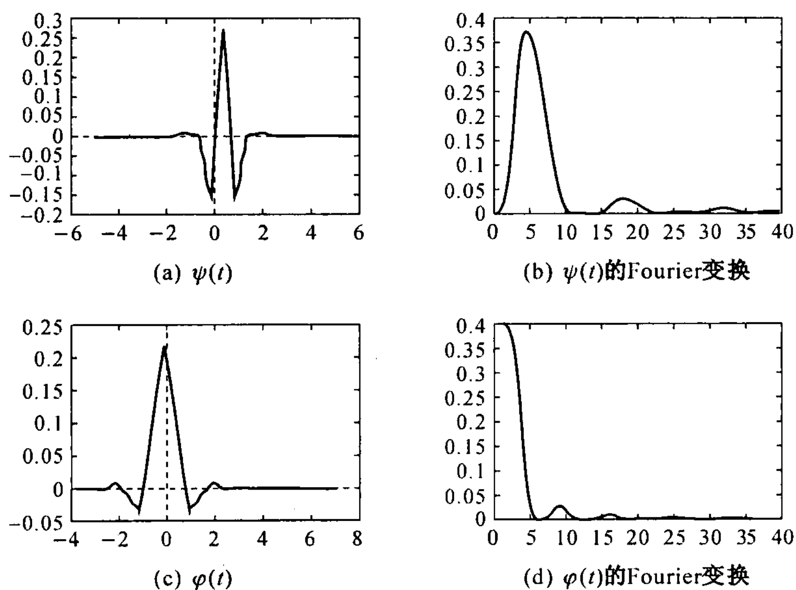
Daubechies 在文献[48]中，用 $f(\omega)=\sum\limits_{n=0}^{2K-1}f_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega}$ 将该 Taylor 展开式简化为求 K 个未知数的 K 个二次方程的解. 当 K 较大时，方程组有解，并计算了 $K=1,2,\cdots,5$ 时的数值解. 图 4-1 ～ 图 4-5 给出了相应的 Coiflet 小波及其 Fourier 变换的波形，也给出了相应的尺度函数及其 Fourier 变换的波形. 可以看出，Coiflet 小波 $\psi(t)$ 和尺度函数 $\varphi(t)$ 都比同阶 Daubechies 小波 $\psi(t)$ 和尺度函数 $\varphi(t)$ 具有更好的对称性. 但这样处理所付出的代价是：N 阶 Coiflet 小波(具有 N 阶消失矩)的支集长度是 $3N-1$，而 N 阶 Daubechies 紧支小波的支集长度为 $2N-1$.



(a) $\psi(t)$　(b) $\psi(t)$的Fourier变换

(c) $\varphi(t)$　(d) $\varphi(t)$的Fourier变换

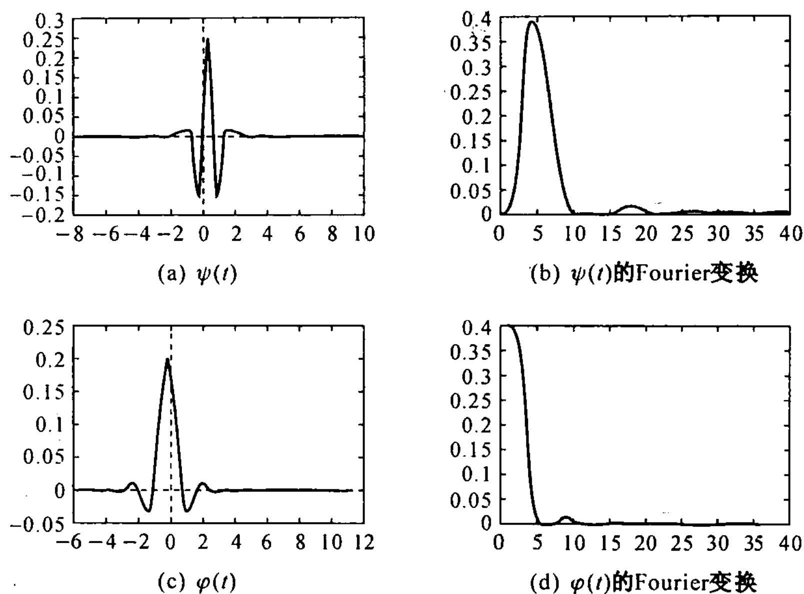
图 4-1　2 阶 Coiflet 小波和相应的尺度函数



(a) $\psi(t)$　(b) $\psi(t)$的Fourier变换

(c) $\varphi(t)$　(d) $\varphi(t)$的Fourier变换

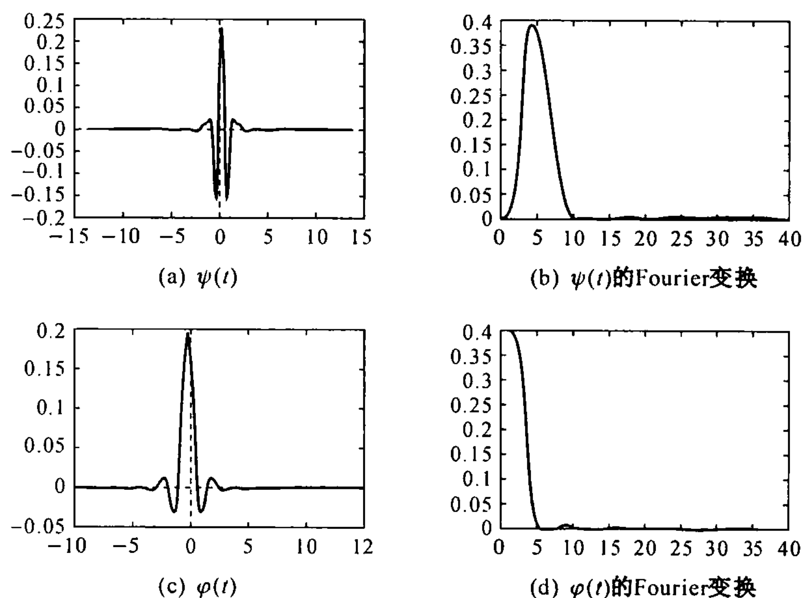
图 4-2　4 阶 Coiflet 小波和相应的尺度函数



(a) $\psi(t)$　(b) $\psi(t)$的Fourier变换

(c) $\varphi(t)$　(d) $\varphi(t)$的Fourier变换

图 4-3　6 阶 Coiflet 小波和相应的尺度函数



(a) $\psi(t)$　(b) $\psi(t)$的Fourier变换

(c) $\varphi(t)$　(d) $\varphi(t)$的Fourier变换

图 4-4　8 阶 Coiflet 小波和相应的尺度函数

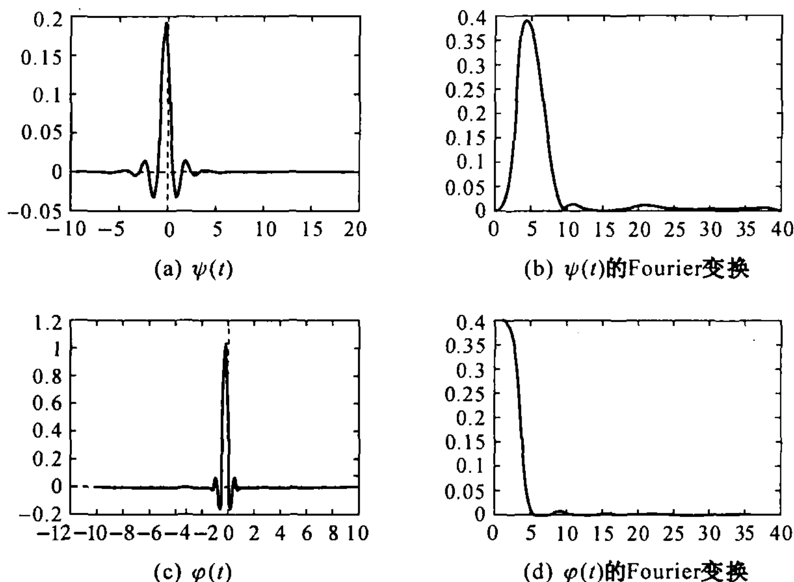


图 4-5 10 阶 Coiflet 小波和相应的尺度函数

习 题 4

1. 什么是 Meyer 型小波和 Daubechies 型小波？二者有何区别与联系？

2. 证明定理 4.3.

3. 设$\{V_j, j\in \mathbf{Z}\}$是$L^2(\mathbf{R})$的一个 OMRA，其生成元为$\varphi(t)$，证明：如果$\varphi(t)$是有限双尺度方程$\varphi(t)=\sum\limits_{k=0}^{N}h_k\varphi(2t-k)$的解，那么

$$\sum_{k=0}^{N}h_k\,\overline{h_{k-2n}}=2\delta_{n0}\quad(n\in\mathbf{Z}),$$

且$\sum\limits_{k=0}^{N}h_k=2$. 并举例说明其逆命题不真.

4. 已知尺度函数$\varphi(t)$的 Fourier 变换为

$$\hat{\varphi}(\omega)=16\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\omega}\right)^4.$$

(1) 请写出$\varphi(t)$的有限双尺度方程.

(2) 求相应的小波 $\psi(t)$，并证明 $\psi(t)$ 不是正交小波.

5. 设 $\varphi(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 满足有限双尺度方程

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{N} h_n \varphi(2t-n),$$

相应的符号为 $P(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N} h_n z^n$，其中 $z \in \mathbf{C}$. 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t = 1$，且 $P(z)$ 满足：

(1) $P(1) = 1$;

(2) $|P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = 1$，当 $|z| = 1$;

(3) $P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t}) \neq 0$，当 $-\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ 时.

证明：$\{\varphi(t-k), k \in \mathbf{Z}\}$ 是一个标准正交系.

6. 设 $\varphi(t) \in L^2(\mathbf{R})$，证明：满足条件 $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |h_n| < \sqrt{2}$ 的双尺度方程 $\varphi(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} h_n \varphi(2t-n)$ 仅有零解 $\varphi(t) = 0$.

7. 证明：任意长度为 4 的实数滤波器 $\{h_n\}$（即当 $n<0$ 且 $n>3$ 时 $h_n = 0$）都可表示为

$$h_0 = \frac{1+\sqrt{2}\cos\alpha}{2},\ h_1 = \frac{1+\sqrt{2}\sin\alpha}{2},\ h_2 = \frac{1-\sqrt{2}\cos\alpha}{2},\ h_3 = \frac{1-\sqrt{2}\sin\alpha}{2},$$

其中 $\alpha \in \mathbf{R}$.

8. 设 $\psi_N(t)$ 是 Daubechies 小波，$P_N(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2N-1} p_k z^k$ 是相应的双尺度符号.

(1) 对于 $N=3$，求满足 $(1+z)^N Q_N(z) = P_N(z)$ 的多项式 $Q_N(z)$.

(2) 对于 $N=4$，求满足 $(1+z)^N Q_N(z) = P_N(z)$ 的多项式 $Q_N(z)$.

9. 计算长度为 6 的紧支正交小波，即 D6 小波.

10. 证明(4.37)式，即

$$\hat{\psi}_N^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, & k = 0,1,\cdots,N-1, \\ -N!\left(\frac{-i}{2}\right)^N Q_N(-1) \neq 0, & k = N. \end{cases}$$

11. 利用 $\psi_N(t)$ 的高阶消失矩性质证明：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \psi_2(t)\mathrm{d}t = -\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

12. 设 $\varphi(t)$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 OMRA 的具有紧支集的生成元，$\{h_n\}$ 是相应的有限滤波器系数，$\psi(t)$ 是由(4.2)式定义的正交小波. 证明：对任意正整

数 N，下列 4 个命题相互等价：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t)\mathrm{d}t = 0, \quad k = 0,1,2,\cdots,N-1$;

(2) $m_0^{(k)}(-1) = 0, \quad k = 0,1,2,\cdots,N-1$;

(3) $\sum_{n\in\mathbf{Z}} (-1)^n n^k h_n = 0, \quad k = 0,1,2,\cdots,N-1$;

(4) 存在一个周期为 1 的 三角多项式 $T(\omega)$，使

$$m_0(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}) = \left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2}\right)^N T(\omega).$$

13. 设 $\varphi(t)$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 OMRA 的具有紧支集的生成元，$\psi(t)$ 是相应的正交小波. 证明：如果 $\psi(t)$ 具有 N 阶消失矩，那么 $\forall n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$，有

$$\hat{\varphi}^{(k)}(n) = 0, \quad k = 0,1,2,\cdots,N-1.$$

14. 设 $\varphi(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 是 Daubechies 小波所对应的尺度函数，满足

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \varphi(2t-k),$$

支集为有限区间$[a,b]$的连续函数 $f(t) \in C_c^0(\mathbf{R})$ 可表示为

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k \varphi(t-k).$$

令 $\| f \|_\infty = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |f(t)|$，证明：

(1) $\left\| \sum_{k=0}^{N-1} a_k \varphi(\cdot - k) \right\|_2^2 \leqslant N \| f \|_\infty^2 \| \varphi \|_1^2$;

(2) $\left\| \sum_{k=0}^{N-1} a_k \varphi(\cdot - k) \right\|_\infty \leqslant N \| f \|_\infty \| \varphi \|_1 \| \varphi \|_\infty$;

(3) 若 $\mathrm{supp}\, f = [0,N]$，且 $f(t)$ 不恒为零，则

$$\| \varphi \|_1 \| \varphi \|_\infty \geqslant \frac{1}{2N+1}.$$

15. 设长度为 $N+1$ 的有限滤波器 $H(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N} h_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}$ $(\omega \in \mathbf{R})$ 满足 $H(0) = 1$.

(1) 证明：无穷乘积 $\prod_{j=1}^{+\infty} H(2^{-j}\omega)$ 在$(-\infty,+\infty)$上处处绝对收敛，且内闭一致收敛.

(2) 令 $\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{+\infty} H(2^{-j}\omega)$，而 $\varphi(t)$ 是 $\hat{\varphi}(\omega)$ 的 Fourier 逆变换，证明：$\varphi(t)$ 是有限双尺度方程 $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{N} h_k \varphi(2t-k)$ 的紧支解.

16. 续上题. 设 $\mathbf{A}=(a_{ij})$ 是 $(2N-1)\times(2N-1)$ 矩阵，其中

$$a_{ij}=\sum_{k=0}^{N}h_k\,\overline{h_{k-2i+j}},\quad -N+1\leqslant i,j\leqslant N-1.$$

又设 $H(\omega)$ 还满足

$$|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2=1,\quad \forall\omega\in\mathbf{R}.$$

证明：

(1) $\lambda=2$ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值；

(2) 如果 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 $\lambda=2$ 的特征子空间的维数等于 1，那么 $\{\varphi(t-k),k\in\mathbf{Z}\}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 中的一个标准正交系.

第五章　非正交小波

正交小波虽然具有光滑性、时频域的局部性等优良特性，但正如我们在前两章已经看到的，正交小波的构造确实相当困难，而且表达式一般也比较复杂，甚至写不出表达式. 本章介绍一类要求比正交性条件更宽泛的小波，即所谓的非正交小波，主要包括二进小波、双正交小波、半正交小波及小波框架等.

5.1　二进小波及其构造

5.1.1　半离散小波

设 $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 是一个基本小波，对于 $a,b \in \mathbf{R}$，得连续小波

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a \neq 0.$$

若同时对参数 a,b 作离散化，就得到离散小波. 最常用的离散小波是取 $a = 2^{-m}$，$b = \frac{n}{2^m}$ 的特别情形，即

$$\psi_{mn}(t) = 2^{\frac{m}{2}}\psi(2^m t - n), \quad m,n \in \mathbf{Z}.$$

所谓半离散小波就是只对参数 a 离散化，而 b 不作离散处理. 特别地，我们对 $a = 2^{-m}$ 这种二进离散感兴趣.

下面我们讨论这种半离散小波具有哪些特性.

我们知道，参数 a 既决定小波的频谱结构，又决定时、频窗口的宽度. 设 $\hat{\psi}(\omega)$ 是一个窗口函数，$\Delta_{\hat{\psi}}$ 是其窗口半径，现将 $\hat{\psi}(\omega)$ 的窗口中心取 $t_{\hat{\psi}} = 3\Delta_{\hat{\psi}}$，则当 $a = 2^{-m}$ 时，$\hat{\psi}_{2^{-m},b}(\omega)$ 的窗口为

$$[t_{\hat{\psi}} \cdot 2^m - 2^m\Delta_{\hat{\psi}},\ t_{\hat{\psi}} \cdot 2^m + 2^m\Delta_{\hat{\psi}}] = [2^{m+1}\Delta_{\hat{\psi}},\ 2^{m+2}\Delta_{\hat{\psi}}].$$

当 m 取遍所有整数时，$\hat{\psi}_{2^{-m},b}(\omega)$ 的窗口恰好填满正实轴$(0, +\infty)$，所以对 a 作离散化 $a = 2^{-m}$ 处理，实际上是把正频率轴作了一个二进划分，这比较符

合工程的需要.

对于连续小波，如果已知信号 $f(t)$ 的连续小波变换 $W_f(a,b)$，那么就可以通过逆变换(反演公式) 求出 $f(t)$，即

$$f(t)=\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}W_f(a,b)\,\overline{\psi_{a,b}(t)}\,\frac{1}{a^2}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b.$$

这就是说，在对 $f(t)$ 作小波变换后保留了 $f(t)$ 的全部信息.

对于离散小波变换 $W_f\left(2^{-m},\frac{n}{2^m}\right)$，$\left\{W_f\left(2^{-m},\frac{n}{2^m}\right)\right\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$ 所包含的信息，当然要比 $\{W_f(a,b),\ a\neq 0,\ a,b\in\mathbf{R}\}$ 所含的信息少了很多. 但如果增加条件"$\{\psi_{mn}(t),\ m,n\in\mathbf{Z}\}$ 构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个标准正交基"，那么，由 $f(t)$ 的离散小波变换仍然能够重建原信号

$$f(t)=\sum_{m,n\in\mathbf{Z}}C_f(m,n)\psi_{mn}(t),$$

这里的系数 $C_f(m,n)$ 恰好就是 $f(t)$ 的离散小波变换

$$C_f(m,n)=W_f\left(2^{-m},\frac{n}{2^m}\right),\quad m,n\in\mathbf{Z}.$$

所以，要从离散小波变换来重建信号 $f(t)$ 时，"正交性"这一条件是不可缺少的.

现在对于半离散的小波变换 $\{W_f(2^{-m},b),\ m\in\mathbf{Z},\ b\in\mathbf{R}\}$ 所包含的信息，比连续小波变换 $\{W_f(a,b),\ a\neq 0,\ a,b\in\mathbf{R}\}$ 少了很多信息，而相对于正交小波来说，又缺少了正交性这一条件. 那么，如果已知 $\{W_f(2^{-m},b),\ m\in\mathbf{Z},\ b\in\mathbf{R}\}$，能否重建信号 $f(t)$ 呢? 当然，对于缺少信息的情况要重建 $f(t)$，就得加上一定的条件来弥补.

5.1.2 二进小波

在连续小波中仅对参数 a 作二进离散化 $a=2^{-m}$，相当于对正频率轴作了一个二进划分，比较符合工程实际的需要. 这种介于连续小波和离散小波之间的半离散小波只要满足一定的条件就是二进小波，它也是一种常用的小波. 下面先介绍二进小波的定义，再讨论它的性质.

定义 5.1 设函数 $\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})$，如果存在常数 A,B，使得

$$0<A\leqslant\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^{-m}\omega)|^2\leqslant B<+\infty,\tag{5.1}$$

则称 $\psi(t)$ 是一个**二进小波**，称(5.1) 式为**稳定性条件**.

定义 5.2 设 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，$\psi(t)$ 是一个二进小波，则把

$$W_f(2^{-m},b)=\langle f(t),\psi_{2^{-m},b}(t)\rangle=2^{\frac{m}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\overline{\psi(2^m t-2^m b)}\,\mathrm{d}t$$

称为 $f(t)$ 的**二进小波变换**.

下面的定理说明了稳定性条件和可允许性条件(2.1)的关系.

定理5.1 设 $\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 是一个二进小波，则

$$A\ln 2\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega}\,\mathrm{d}\omega\leqslant B\ln 2,\tag{5.2}$$

$$A\ln 2\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega}\,\mathrm{d}\omega\leqslant B\ln 2.\tag{5.3}$$

因而 $\psi(t)$ 是一个允许小波或基本小波.

证 因为 $\psi(t)$ 是二进小波，所以稳定性条件(5.1)成立：

$$A\leqslant\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^{-m}\omega)|^2\leqslant B.\tag{5.4}$$

两边同乘以$\frac{1}{\omega}$，并在区间[1,2]上积分，得

$$A\ln 2\leqslant\sum_{m\in\mathbf{Z}}\int_1^2\frac{|\hat{\psi}(2^{-m}\omega)|^2}{\omega}\,\mathrm{d}\omega\leqslant B\ln 2.\tag{5.5}$$

又因为

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}}\int_1^2\frac{|\hat{\psi}(2^{-m}\omega)|^2}{\omega}\,\mathrm{d}\omega=\sum_{m\in\mathbf{Z}}\int_{2^{-m}}^{2^{-m+1}}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega}\,\mathrm{d}\omega=\int_0^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega}\,\mathrm{d}\omega,$$

代入(5.5)式即得(5.2)式.

再将(5.4)式两边同乘以$-\frac{1}{\omega}$，并在区间[-2，-1]上积分，得

$$A\ln 2\leqslant\sum_{m\in\mathbf{Z}}\int_{-2}^{-1}\frac{|\hat{\psi}(2^{-m}\omega)|^2}{-\omega}\,\mathrm{d}\omega\leqslant B\ln 2.\tag{5.6}$$

因为

$$\begin{aligned}\sum_{m\in\mathbf{Z}}\int_{-2}^{-1}\frac{|\hat{\psi}(2^{-m}\omega)|^2}{-\omega}\mathrm{d}\omega&=\sum_{m\in\mathbf{Z}}\int_1^2\frac{|\hat{\psi}(-2^{-m}\omega)|^2}{\omega}\,\mathrm{d}\omega\\&=\sum_{m\in\mathbf{Z}}\int_{2^{-m}}^{2^{-m+1}}\frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega}\,\mathrm{d}\omega\\&=\int_0^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega}\,\mathrm{d}\omega,\end{aligned}$$

代入(5.6)式即得(5.3)式.

又因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\,\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^0\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{-\omega}\,\mathrm{d}\omega+\int_0^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega}\,\mathrm{d}\omega,$$

且由于

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{-\omega} \mathrm{d}\omega = \int_{0}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega} \mathrm{d}\omega,$$

因此有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} \mathrm{d}\omega \leqslant 2B\ln 2 < +\infty,$$

即可允许性条件(2.1)成立，所以二进小波 $\psi(t)$ 是允许小波. ∎

这个定理表明，一个函数 $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$，只要满足稳定性条件，就可以称之为允许小波，因而具有小波的所有特性.

前面讲过，二进小波变换 $\{W_f(2^{-m},b),\ m \in \mathbf{Z},\ b \in \mathbf{R}\}$ 与连续小波变换 $\{W_f(a,b),\ a \neq 0,\ a,b \in \mathbf{R}\}$ 相比要缺少一部分变换信息，这就通过稳定性条件加以弥补，因此，由二进小波变换的信息

$$\{W_f(2^{-m},b),\ m \in \mathbf{Z},\ b \in \mathbf{R}\}$$

仍可反演出 $f(t)$. 下面就来阐明这一事实. 先解释两个符号.

因为 $\psi_{2^{-m},b}(t) = 2^{\frac{m}{2}}\psi(2^m t - 2^m b)$，所以 $f(t)$ 的二进小波变换可以用卷积来表示：

$$\begin{aligned} W_f(2^{-m},b) &= \langle f(t), \psi_{2^{-m},b}(t) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) 2^{\frac{m}{2}} \overline{\psi(2^m t - 2^m b)}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) 2^{\frac{m}{2}} \overline{\psi(-2^m(b-t))}\, \mathrm{d}t \\ &= 2^{\frac{m}{2}} (f * \overline{\psi(-2^m \cdot)})(b). \end{aligned}$$

这里，用“•”表示变量 t，而 $f * \overline{\psi(-2^m \cdot)}$ 表示 $f(t)$ 与 $\overline{\psi(-2^m t)}$ 的卷积，卷积的结果是 b 的函数. 此外，记号 $\hat{\psi}(-2^m(\cdot - t))$ 表示 $\psi(-2^m(x-t))$ 对变量 x 的 Fourier 变换，即

$$\hat{\psi}(-2^m(\cdot - t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(-2^m(x-t)) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}x,$$

有时也记作 $\hat{\psi}(-2^m(\cdot - t))(\omega)$，强调它是 ω 的函数.

定理5.2 设 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$，$\psi(t)$ 是一个二进小波，$W_f(2^{-m},b)$ 是 $f(t)$ 的二进小波变换，则有反演公式

$$f(t) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(2^{\frac{m}{2}} W_f(2^{-m},b)\right)\left(2^m \psi^*(2^m t - 2^m b)\right) \mathrm{d}b, \tag{5.7}$$

这里，$\psi^*(t)$ 是

$$\hat{\psi}^*(\omega) = \frac{\hat{\psi}(\omega)}{\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2} \tag{5.8}$$

的 Fourier 逆变换.

证 首先，由(5.8)式有

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}}\overline{\hat{\psi}(2^{-m}\omega)}\hat{\psi}^*(2^{-m}\omega)=\sum_{m\in\mathbf{Z}}\frac{\overline{\hat{\psi}(2^{-m}\omega)}\hat{\psi}(2^{-m}\omega)}{\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^{-k-m}\omega)|^2}$$

$$=\sum_{m\in\mathbf{Z}}\frac{|\hat{\psi}(2^{-m}\omega)|^2}{\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^{-n}\omega)|^2}=1.$$

为表述清楚且方便起见，记

$$W_f(m,b)=2^{\frac{m}{2}}W_f(2^{-m},b)=2^m(f*\overline{\psi(-2^m\,\bullet)})(b),$$

则根据 Fourier 变换的性质$\widehat{(f*g)}(\omega)=\hat{f}(\omega)\cdot\hat{g}(\omega)$，可得

$$\begin{aligned}\hat{W}_f(m,\omega)&=2^m\hat{f}(\omega)\cdot\widehat{\overline{\psi(-2^m\,\bullet)}}(\omega)\\&=2^m\hat{f}(\omega)\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\psi(-2^mt)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\hat{f}(\omega)\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\psi(u)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2^{-m}\omega)u}\mathrm{d}u\\&=\hat{f}(\omega)\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\psi(u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2^{-m}\omega)u}}\,\mathrm{d}u\\&=\hat{f}(\omega)\,\overline{\hat{\psi}(2^{-m}\omega)}.\end{aligned}$$

又记$\xi(b)=\overline{2^m\psi^*(2^mt-2^mb)}$，则

$$\begin{aligned}\hat{\xi}(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{2^m\psi^*(2^mt-2^mb)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega b}\mathrm{d}b\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\psi^*(u)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2^{-m}\omega)u}\mathrm{d}u\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\psi^*(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2^{-m}\omega)u}}\,\mathrm{d}u\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\overline{\hat{\psi}^*(2^{-m}\omega)}.\end{aligned}$$

根据 Parseval 等式，得

$$\begin{aligned}&\sum_{m\in\mathbf{Z}}\int_{-\infty}^{+\infty}\big(2^{\frac{m}{2}}W_f(2^{-m},b)\big)\big(2^m\psi^*(2^mt-2^mb)\big)\mathrm{d}b\\&=\sum_{m\in\mathbf{Z}}\int_{-\infty}^{+\infty}W_f(m,b)\,\overline{\xi(b)}\,\mathrm{d}b\\&=\frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbf{Z}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{W}_f(m,\omega)\,\overline{\hat{\xi}(\omega)}\,\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbf{Z}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\,\overline{\hat{\psi}(2^{-m}\omega)}\hat{\psi}^*(2^{-m}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\sum_{m\in\mathbf{Z}}\overline{\hat{\psi}(2^{-m}\omega)}\hat{\psi}^{*}(2^{-m}\omega)\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = f(t). \tag{5.9}$$

∎

在反演公式(5.7)中出现了一个与 $\psi(t)$ 有关的函数 $\psi^{*}(t)$，那么这样的 $\psi^{*}(t)$ 有什么特点呢？

定理5.3 设 $\psi(t)\in L^{2}(\mathbf{R})$ 是一个二进小波，则

$$\hat{\psi}^{*}(\omega) = \frac{\hat{\psi}(\omega)}{\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^{-k}\omega)|^{2}}$$

的 Fourier 逆变换 $\psi^{*}(t)$ 也是一个二进小波.

证 因为 $\psi(t)$ 是一个二进小波，所以存在常数 A,B，使

$$0 < A \leqslant \sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^{-k}\omega)|^{2} \leqslant B < +\infty.$$

一方面，根据 Parseval 等式，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi^{*}(t)|^{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{\psi}^{*}(\omega)|^{2}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\hat{\psi}(\omega)}{\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^{-k}\omega)|^{2}}\right|^{2}\mathrm{d}\omega$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi A^{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{\psi}(\omega)|^{2}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{A^{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(t)|^{2}\mathrm{d}t$$

$$< +\infty,$$

所以 $\psi^{*}(t)\in L^{2}(\mathbf{R})$.

另一方面，由于

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}^{*}(2^{-m}\omega)|^{2} = \sum_{m\in\mathbf{Z}}\left|\frac{\hat{\psi}(2^{-m}\omega)}{\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^{-k-m}\omega)|^{2}}\right|^{2} = \sum_{m\in\mathbf{Z}}\left|\frac{\hat{\psi}(2^{-m}\omega)}{\sum_{n\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^{-n}\omega)|^{2}}\right|^{2}$$

$$= \frac{\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^{-m}\omega)|^{2}}{\left(\sum_{n\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^{-n}\omega)|^{2}\right)^{2}} = \frac{1}{\sum_{n\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^{-n}\omega)|^{2}},$$

所以，$\psi^{*}(t)$ 满足稳定性条件

$$0 < \frac{1}{B} \leqslant \sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}^{*}(2^{-m}\omega)|^{2} \leqslant \frac{1}{A} < +\infty.$$

因此，$\psi^{*}(t)$ 是二进小波. ∎

5.1.3 二进小波的构造

二进小波的构造比正交小波简单得多，稳定性条件(5.1)很容易满足.

考虑到实际应用，当然要求二进小波的表达式简单，并且与正交小波一样，具有光滑性、时频域的局部性，还希望具有对称性. 作为例子，下面介绍一种利用 B- 样条构造二进小波的方法.

根据定理 3.14 和定理 3.15，m 阶 B- 样条 $N_m(t)$ 具有下列性质：

(1) $N_m(t)=(N_{m-1}*N_1)(t)$，故 $\hat{N}_m(\omega)=(\hat{N}_1(\omega))^m$.

(2) $N_m(t)$ 具有 $m-2$ 阶连续导数.

(3) $0\leqslant N_m(t)\leqslant 1$，且$\int_{-\infty}^{+\infty}N_m(t)\mathrm{d}t=1$.

(4) $N_m(t)$ 关于 $t=\dfrac{m}{2}$ 轴对称.

(5) $\operatorname{supp}N_m(t)=[0,m]$，且 $N_m(t)$ 在$\left[0,\dfrac{m}{2}\right]$上单调上升，在 $t=\dfrac{m}{2}$ 时，达到最大，在$\left[\dfrac{m}{2},m\right]$上，单调下降.

现在，利用 B- 样条的这些性质来构造一种二进小波. 令

$$\hat{\psi}(\omega)=N_m(\omega-m)+N_m(\omega-1.5m), \tag{5.10}$$

下面证明 $\hat{\psi}(\omega)$ 的 Fourier 逆变换 $\psi_1(t)$ 是一个二进小波.

首先，由样条 $N_m(t)$ 的性质(5)，有

$$\operatorname{supp}\{N_m(\omega-m)\}=[m,2m],$$
$$\operatorname{supp}\{N_m(\omega-1.5m)\}=[1.5m,2.5m],$$

从而

$$\operatorname{supp}\hat{\psi}(\omega)=[m,2.5m].$$

根据 Parseval 等式，得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi_1(t)|^2\mathrm{d}t&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{\psi}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{m}^{2.5m}|\hat{\psi}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega\\&\leqslant\frac{3}{2\pi}\int_{m}^{2.5m}|N_m(\omega-m)|^2\mathrm{d}\omega\\&\leqslant\frac{3}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|N_m(\omega)|^2\mathrm{d}\omega<+\infty,\end{aligned}$$

因此 $\psi_1(t)\in L^2(\mathbf{R})$.

再证明对于任意正整数 m，存在常数 A,B 使

$$0<A\leqslant\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2\leqslant B<+\infty. \tag{5.11}$$

对任意取定的 ω，考虑级数$\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2$ 的非零项.

由于 $\operatorname{supp}\hat{\psi}(\omega)=[m,2.5m]$，所以当且仅当 $2^jm\leqslant\omega\leqslant 2^j\cdot\dfrac{5}{2}m$ 时，

$\hat{\psi}(2^{-j}\omega) \neq 0$，因此级数有且仅有两个非零项. 又因为

$$|\hat{\psi}(2^{-j}\omega)| \leqslant |N_m(2^{-j}\omega - m)| + |N_m(2^{-j}\omega - 1.5m)| \leqslant 2,$$

所以

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 \leqslant 8 = B.$$

这就只需证明存在常数 $A > 0$，使 $\sum_{j\in\mathbf{Z}} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 \geqslant A$.

由于 $N_m(\omega - m)$ 的非零区间为$[m,2m]$，$N_m(\omega - 1.5m)$ 的非零区间为$[1.5m,2.5m]$，所以在$[m,1.5m]$上，$\hat{\psi}(\omega) = N_m(\omega - m)$，且 $\hat{\psi}(\omega)$ 单调上升，在$[2m,2.5m]$上，$\hat{\psi}(\omega) = N_m(\omega - 1.5m)$，且单调下降. 如图 5-1 所示.

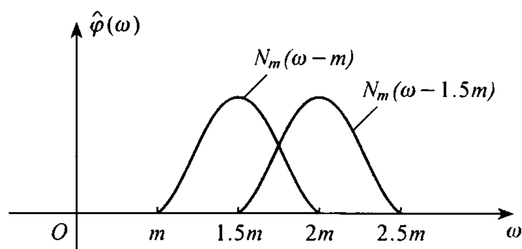


图 5-1

对于任意给定的 ω，必存在一个 j_0，使得 $2^{j_0}\omega \in [m,2.5m]$，现将 $\hat{\psi}(\omega)$ 的非零区间分为三段：

$$[m,1.1m] \cup (1.1m,2.4m) \cup [2.4m,2.5m],$$

相应地，分三种情形估计 $\sum_{j\in\mathbf{Z}} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2$ 的下界.

（Ⅰ） 若 $2^{j_0}\omega \in [m,1.1m]$，则 $2^{j_0+1}\omega \in [2m,2.2m]$，而 $\hat{\psi}(\omega)$ 在$[2m,2.5m]$上单调下降. 所以有

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 \geqslant |\hat{\psi}(2^{j_0+1}\omega)|^2 \geqslant |\hat{\psi}(2.2m)|^2 = |N_m(0.7m)|^2.$$

（Ⅱ） 若 $2^{j_0}\omega \in (1.1m,2.4m)$，则

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbf{Z}} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 &\geqslant |\hat{\psi}(2^{j_0}\omega)|^2 \\ &= |N_m(2^{j_0}\omega - m) + N_m(2^{j_0}\omega - 1.5m)|^2 \\ &\geqslant |N_m(0.1m)|^2.\end{aligned}$$

（Ⅲ） 若 $2^{j_0}\omega \in [2.4m,2.5m]$，则 $2^{j_0-1}\omega \in [1.2m,1.25m]$，而$\hat{\psi}(\omega)$ 在$[1.2m,1.25m]$上单调上升. 所以有

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} |\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 \geqslant |\hat{\psi}(2^{j_0-1}\omega)|^2 \geqslant |\hat{\psi}(1.2m)|^2 = |N_m(0.2m)|^2.$$

现在取

$$A=\min\{|N_m(0.7m)|^2,|N_m(0.1m)|^2,|N_m(0.2m)|^2\}$$
$$=|N_m(0.1m)|^2,$$

则对以上三种情况都有 $\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2\geqslant A$，因此(5.11)式成立．故 $\hat{\psi}(\omega)$ 的 Fourier 逆变换 $\psi_1(t)=F^{-1}(\hat{\psi}(\omega))$ 是一个二进小波．

最后，求出 $\psi_1(t)$ 的解析式．因为

$$F(\hat{\psi}(\omega))=F(N_m(\omega-m)+N_m(\omega-1.5m))$$
$$=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt}\hat{N}_m(t)+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}1.5mt}\hat{N}_m(t)$$
$$=(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}1.5mt})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{m}{2}t}\left(\sin\frac{t}{2}\Big/\frac{t}{2}\right)^m$$
$$=\left(\frac{2}{t}\right)^m\left(\sin\frac{t}{2}\right)^m(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}1.5mt}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2mt}),$$

根据 Fourier 逆变换的性质，易知

$$F^{-1}(f(t))=\frac{1}{2\pi}F(f(-t)),$$

所以

$$\psi_1(t)=F^{-1}(\hat{\psi}(\omega))=\frac{1}{2\pi}F(\hat{\psi}(-\omega))$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{t}\right)^m\left(\sin\frac{t}{2}\right)^m(\mathrm{e}^{\mathrm{i}1.5mt}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}2mt}).$$

可见 $\psi_1(t)$ 是一个形式简单、性质良好的二进小波，但它是一个复值函数．根据需要，我们还可以进一步把它改造成为一个实函数．

若令 $\hat{\psi}_2(\omega)=\hat{\psi}(\omega)+\hat{\psi}(-\omega)$，其 Fourier 逆变换记为 $\psi(t)$，则

$$\psi(t)=F^{-1}(\hat{\psi}_2(\omega))=\frac{1}{2\pi}F(\hat{\psi}_2(-\omega))$$
$$=\frac{1}{2\pi}F(\hat{\psi}(-\omega))+\frac{1}{2\pi}F(\hat{\psi}(\omega))$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{t}\right)^m\left(\sin\frac{t}{2}\right)^m(\mathrm{e}^{\mathrm{i}1.5mt}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}2mt})$$
$$+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{t}\right)^m\left(\sin\frac{t}{2}\right)^m(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}1.5mt}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2mt})$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{t}\right)^m\left(\sin\frac{t}{2}\right)^m\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}1.5mt}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}1.5mt}}{2}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2mt}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2mt}}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{t}\right)^m\left(\sin\frac{t}{2}\right)^m\left(\cos\frac{3}{2}mt+\cos 2mt\right).$$

容易证明，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{2}{t}\right)^{2m}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2m}\left|\cos\frac{3}{2}mt + \cos 2mt\right|^2 \mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{8}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2m}\mathrm{d}t < +\infty,$$

因此 $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$. 另一方面，根据(5.10)与(5.11)式，显然有

$$0 < A \leqslant \sum_{j\in\mathbf{Z}} |\hat{\psi}_2(2^{-j}\omega)|^2 \leqslant 2B < +\infty.$$

由此可见，$\psi(t)$ 是一个实的二进小波，其图像如图 5-2 所示.

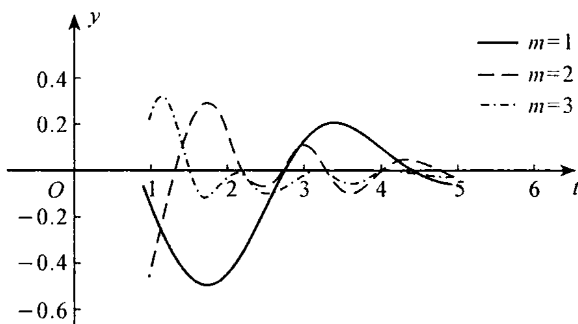


图 5-2 实的二进小波 $\psi(t)$

以上构造出来的二进小波具有如下性质：

(1) $\psi(t)$ 充分光滑；

(2) $\psi(t)$ 有很好的局部性：当 $t \to \infty$ 时，$\psi(t) = O\left(\frac{1}{t^m}\right)$；

(3) $\hat{\psi}(\omega)$ 具有紧支集；

(4) $\psi(t)$ 具有对称性.

我们可以根据问题的需要，通过选择 m 来控制时域和频域的局部性. m 越大，时域的局部性越好，但频域上的支集长度随 m 的增大而增大，频域局部性变差.

5.2 双正交小波

现在，我们介绍双正交小波及其构造. 双正交小波是从小波反演变换的角度出发，放弃正交性的要求，使得小波的构造比较灵活，并且在局部性、对称性、光滑性等方面都具有更好的性质.

5.2.1 反演公式与对偶

迄今，我们已经介绍了连续小波变换、离散小波变换以及二进小波变换. 这三种小波变换都有相应的反演公式，并且这些公式在结构上很相似，都是以积分或求和形式给出的具有核函数 $\psi^*(t)$ 的逆变换. 我们把这种能使小波变换的反演公式成立的函数 $\psi^*(t)$ 称为基本小波 $\psi(t)$ 的一个**对偶小波**. 同样也称 $\psi(t)$ 为 $\psi^*(t)$ 的对偶小波，或称 $\psi(t)$ 和 $\psi^*(t)$ 是一对对偶小波.

因此，对偶小波给反演公式赋予了新的意义. 这就是说，一个函数或者信号 $f(t)$ 经过小波变换后，只有知道了相应的对偶小波，信号的重建(即 $f(t)$ 的反演)才能实现.

对于连续小波变换的反演公式：

$$f(t)=\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}W_f(a,b)\left(\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right)\cdot\frac{1}{a^2}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b,$$

按照对偶的意义，$\psi(t)=\psi^*(t)$，我们称 $\psi(t)$ 为**自对偶小波**.

在二进小波变换的反演公式

$$f(t)=\sum_{m\in\mathbf{Z}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(2^{\frac{m}{2}}W_f(2^{-m},b)\right)\left(2^m\psi^*(2^mt-2^mb)\right)\mathrm{d}b$$

中，因为 $\psi^*(t)$ 可以取由(5.8)式所确定的函数

$$\hat{\psi}^*(\omega)=\frac{\hat{\psi}(\omega)}{\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2}$$

的 Fourier 逆变换，这是一个二进小波，所以 $\psi^*(t)$ 是 $\psi(t)$ 的**二进对偶小波**. 注意二进小波的对偶可能不唯一. 事实上，我们有

定理5.4 设 $\psi(t)$ 是一个二进小波，$\psi^*(t)\in L^2(\mathbf{R})$，且满足

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}^*(2^{-m}\omega)|^2<+\infty,$$

则 $\psi^*(t)$ 是 $\psi(t)$ 的二进对偶小波的充分必要条件是

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}}\overline{\hat{\psi}(2^{-m}\omega)}\hat{\psi}^*(2^{-m}\omega)=1. \tag{5.12}$$

证 记 $F(\omega)=\sum_{m\in\mathbf{Z}}\overline{\hat{\psi}(2^{-m}\omega)}\hat{\psi}^*(2^{-m}\omega)$，并注意到(5.9)式，则对任一 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，反演公式(5.7)可写为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\sum_{m\in\mathbf{Z}}\overline{\hat{\psi}(2^{-m}\omega)}\hat{\psi}^*(2^{-m}\omega)\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)F(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

再利用 $f(t)$ 的 Fourier 变换的反演公式，因此 $\psi^*(t)$ 是 $\psi(t)$ 的二进对偶的充分必要条件是

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)F(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

这又等价于 $F(\omega)=1$ 即条件(5.12) 成立. ∎

上面讨论了连续小波和半离散小波的对偶，下面讨论离散小波的对偶.

定义 5.3 设 $\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})$，如果二进伸缩与整数平移系 $\{\psi_{mn}(t)\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$ 构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 Riesz 基，则称 $\psi(t)$ 是一个 **Riesz 函数**，简称 **R 函数**.

对于一个 R 函数 $\psi(t)$，如果存在 $\psi^*(t)\in L^2(\mathbf{R})$，满足

$$\langle\psi_{mn},\psi_{jk}^*\rangle=\delta_{mj}\cdot\delta_{nk},\quad \forall m,n,j,k\in\mathbf{Z}, \tag{5.13}$$

则称 $\psi(t)$ 和 $\psi^*(t)$ 是互为对偶的**双正交小波**. 有时，也称 $\psi(t)$ 或 $\psi^*(t)$ 为一个 **Riesz 小波**，简称 **R 小波**.

对于正交小波 $\psi(t)$，本身就满足(5.13) 式

$$\langle\psi_{mn},\psi_{jk}\rangle=\delta_{mj}\cdot\delta_{nk},\quad \forall m,n,j,k\in\mathbf{Z},$$

所以正交小波是自对偶的，是双正交小波的特殊情形.

定义 5.4 设 $\{V_m\}$ 和 $\{V_j^*\}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的两个GMRA，而 $\varphi(t)$ 和 $\varphi^*(t)$ 是相应的生成元，如果满足

$$\langle\varphi(t-m),\varphi^*(t-n)\rangle=\delta_{mn},\quad \forall m,n\in\mathbf{Z}, \tag{5.14}$$

则称 $\varphi(t)$ 和 $\varphi^*(t)$ 是一对**对偶尺度函数**.

对于多分辨率分析 $\{V_j\}$，有双尺度方程

$$\varphi(t)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_n\varphi(2t-n),$$

$$\hat{\varphi}(\omega)=P(e^{-i\frac{\omega}{2}})\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

由于 $\{V_j^*\}$ 也是一个多分辨率分析，当然也有双尺度方程

$$\varphi^*(t)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_n^*\varphi^*(2t-n),$$

$$\hat{\varphi}^*(\omega)=R(e^{-i\frac{\omega}{2}})\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

其中 $P(z)=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_nz^n$ 与 $R(z)=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_n^*z^n$ (其中 z 为复数) 分别是这两个多分辨率分析各自的双尺度符号.

定义 5.5 如果双尺度符号 $P(z)$ 和 $R(z)$ 在 $|z|=1$ 上满足

$$P(z)\overline{R(z)}+P(-z)\overline{R(-z)}=1, \tag{5.15}$$

则称这两个双尺度符号 $P(z)$ 和 $R(z)$ 是相互对偶的.

尺度函数的对偶和双尺度符号的对偶有如下关系.

定理5.5 设 $\{V_m\}$ 和 $\{V_j^*\}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的两个GMRA，而 $\varphi(t)$ 和 $\varphi^*(t)$ 是相应的生成元，$P(z)$ 和 $R(z)$ 是相应的双尺度符号，则下列条件相互等价：

(1) 尺度函数 $\varphi(t)$ 和 $\varphi^*(t)$ 是相互对偶的.

(2) 对任意的 $\omega\in\mathbf{R}$，有

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)\overline{\hat{\varphi}^*(\omega+2k\pi)}=1. \tag{5.16}$$

(3) 双尺度符号 $P(z)$ 和 $R(z)$ 是相互对偶的.

证 根据对偶尺度函数的定义(5.14)式及定理2.5，即知条件(1)与条件(2)相互等价. 下证(1)与(3)等价. 注意到

$$\hat{\varphi}(\omega)=P(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right),\quad \hat{\varphi}^*(\omega)=R(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

利用Parseval等式，有

$$\begin{aligned}
&\langle\varphi(t-m),\varphi^*(t-n)\rangle\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}(\omega)\overline{\hat{\varphi}^*(\omega)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m-n)\omega}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}P(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{R(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})}\ \overline{\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}\right)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m-n)\omega}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\int_{4k\pi}^{4(k+1)\pi}P(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})\overline{R(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m-n)\omega}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}\right)}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{4\pi}P(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})\overline{R(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m-n)\omega}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+2k\pi\right)\overline{\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}+2k\pi\right)}\mathrm{d}\omega
\end{aligned}$$

因此，$\varphi(t)$ 和 $\varphi^*(t)$ 是相互对偶的当且仅当

$$\begin{aligned}
\delta_{mn}&=\langle\varphi(t-m),\varphi^*(t-n)\rangle\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{4\pi}P(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})\overline{R(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\omega}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{0}^{2\pi}P(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})\overline{R(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\omega}\mathrm{d}\omega\right.\\
&\qquad\left.+\int_{2\pi}^{4\pi}P(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})\overline{R(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\omega}\mathrm{d}\omega\right)\\
&=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{0}^{2\pi}P(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})\overline{R(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\omega}\mathrm{d}\omega\right.\\
&\qquad\left.+\int_{0}^{2\pi}P(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})\overline{R(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\omega}\mathrm{d}\omega\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(P(e^{-i\frac{\omega}{2}})\overline{R(e^{-i\frac{\omega}{2}})}+P(-e^{-i\frac{\omega}{2}})\overline{R(-e^{-i\frac{\omega}{2}})}\right)e^{i(m-n)\omega}d\omega$$

$$\Leftrightarrow P(e^{-i\frac{\omega}{2}})\overline{R(e^{-i\frac{\omega}{2}})}+P(-e^{-i\frac{\omega}{2}})\overline{R(-e^{-i\frac{\omega}{2}})}=1,\ \forall\omega\in[0,2\pi].$$

这又等价于在 $|z|=1$ 上有

$$P(z)\overline{R(z)}+P(-z)\overline{R(-z)}=1,$$

即 $P(z)$ 和 $R(z)$ 是相互对偶的. ∎

现在讨论对偶尺度函数与对偶小波的关系. 设

$$\psi(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}g_k\varphi(2t-k),$$

$$\psi^*(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}g_k^*\varphi^*(2t-k),$$

其中 $g_k=(-1)^k\overline{h_{1-k}}$, $g_k^*=(-1)^k\overline{h_{1-k}^*}$, 而 $\varphi(t)$ 和 $\varphi^*(t)$ 是一对对偶尺度函数. 记

$$Q(z)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}g_kz^k,\quad S(z)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}g_k^*z^k.$$

则

$$\hat{\psi}(\omega)=Q(e^{-i\frac{\omega}{2}})\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

$$\hat{\psi}^*(\omega)=S(e^{-i\frac{\omega}{2}})\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

相应地, 有

$$V_m=\overline{\text{span}}\{\varphi_{mn}(t),\ n\in\mathbf{Z}\},\quad V_m^*=\overline{\text{span}}\{\varphi_{mn}^*(t),\ n\in\mathbf{Z}\};$$

$$W_m=\overline{\text{span}}\{\psi_{mn}(t),\ n\in\mathbf{Z}\},\quad W_m^*=\overline{\text{span}}\{\psi_{mn}^*(t),\ n\in\mathbf{Z}\};$$

$$V_{m+1}=V_m\oplus W_m,\qquad V_{m+1}^*=V_m^*\oplus W_m^*.$$

定理5.6 如果尺度函数 $\varphi(t)$ 和 $\varphi^*(t)$ 是相互对偶的, 那么

(1) $\psi(t)$ 和 $\psi^*(t)$ 是互为对偶的双正交小波, 即 $\forall m,n,k,j\in\mathbf{Z}$, 有

$$\langle\psi_{mn},\psi_{jk}^*\rangle=\delta_{mj}\cdot\delta_{nk}. \tag{5.17}$$

(2) 具有如下意义的正交性: $\forall m,n,k\in\mathbf{Z}$, 有

$$\langle\varphi_{mn},\psi_{mk}^*\rangle=0,\quad\langle\varphi_{mn}^*,\psi_{mk}\rangle=0.$$

这个正交性也可表述为 $V_m\perp W_m^*$, $V_m^*\perp W_m$.

证 整个证明分为三个部分:

(Ⅰ) $\langle\psi_{mn},\psi_{mk}^*\rangle=\delta_{nk}$.

(Ⅱ) $\langle\varphi_{mn},\psi_{mk}^*\rangle=0$, $\langle\varphi_{mn}^*,\psi_{mk}\rangle=0$.

(Ⅲ) $\langle \psi_{mn}, \psi_{jk}^* \rangle = 0 \ (m \neq j)$.

先证(Ⅰ). 对任一 $m \in \mathbf{Z}$, 利用 Parseval 等式, 有

$$\langle \psi_{mn}, \psi_{mk}^* \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{\psi}_{mn}, \hat{\psi}_{mk}^* \rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2^{\frac{m}{2}} \cdot 2^{-m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\omega}{2^m}} \hat{\psi}\left(\frac{\omega}{2^m}\right) \cdot \overline{2^{\frac{m}{2}} \cdot 2^{-m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\omega}{2^m}} \hat{\psi}^*\left(\frac{\omega}{2^m}\right)} \, \mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}\left(\frac{\omega}{2^m}\right) \overline{\hat{\psi}^*\left(\frac{\omega}{2^m}\right)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)\cdot\frac{\omega}{2^m}} \mathrm{d}\left(\frac{\omega}{2^m}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(\omega) \overline{\hat{\psi}^*(\omega)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)\omega} \mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \overline{S(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})} \, \overline{\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}\right)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)\omega} \mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{j\in\mathbf{Z}} \int_{2j\pi}^{2(j+1)\pi} Q(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \overline{S(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})} \overline{\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}\right)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)\omega} \mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j\in\mathbf{Z}} Q(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}-j\pi}) \overline{S(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}-j\pi})} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+j\pi\right) \overline{\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}+j\pi\right)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)\omega} \mathrm{d}\omega.$$

把求和指标 j 按奇、偶项分开, 并应用(5.16)式, 得

$$\langle \psi_{mn}, \psi_{mk}^* \rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(Q(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}) \overline{S(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})} \sum_{l\in\mathbf{Z}} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+2l\pi\right) \overline{\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}+2l\pi\right)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)\omega} \right.$$

$$\left. + Q(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}) \overline{S(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})} \sum_{l\in\mathbf{Z}} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+\pi+2l\pi\right) \overline{\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}+\pi+2l\pi\right)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)\omega} \right) \mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(Q(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}) \overline{S(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})} + Q(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}) \overline{S(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})} \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)\omega} \mathrm{d}\omega.$$

又由定理 5.5 可知, $Q(z)$ 和 $S(z)$ 也是一对对偶, 故当 $|z| = 1$ 时,

$$Q(z)\overline{S(z)} + Q(-z)\overline{S(-z)} = 1.$$

所以就得到 $\forall n, k \in \mathbf{Z}$, 有

$$\langle \psi_{mn}, \psi_{mk}^* \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)\omega} \mathrm{d}\omega = \delta_{nk}.$$

再证明(Ⅱ). 这与上述证明过程相仿, 不再重复.

最后证(Ⅲ). 当 $m < j$ 时, 由于 $\psi_{mn}(t) \in W_m \subset V_j$, 而由已证明的(Ⅱ), 有 $V_j \perp W_j^*$, 且 $W_j^* = \overline{\operatorname{span}}\{\psi_{jk}^*(t), \ k \in \mathbf{Z}\}$, 这就是说 V_j 中的元素均与 $\psi_{jk}^*(t)$ 正交, 所以

$$\langle \psi_{mn}, \psi_{jk}^* \rangle = 0, \quad \forall n, k \in \mathbf{Z}.$$

当 $m > j$ 时, 同理可证

$$\langle \psi_{mn}, \psi_{jk}^* \rangle = 0, \quad \forall n, k \in \mathbf{Z}. \qquad \blacksquare$$

对于双正交小波 $\psi(t)$ 和 $\psi^*(t)$，因为函数系 $\{\psi_{mn}(t),\ m,n \in \mathbf{Z}\}$ 和 $\{\psi_{jk}^*(t),\ j,k \in \mathbf{Z}\}$ 都是 $L^2(\mathbf{R})$ 的 Riesz 基，所以 $\forall f(t) \in L^2(\mathbf{R})$，可将 $f(t)$ 展开为小波级数

$$f(t) = \sum_{m,n\in\mathbf{Z}} c_{mn}\psi_{mn}(t) \quad 或 \quad f(t) = \sum_{m,n\in\mathbf{Z}} c_{mn}^*\psi_{mn}^*(t).$$

为了求出展开式的系数，利用双正交性条件(5.17)，在展开式两边用 $\psi_{jk}^*(t)$ 或 $\psi_{jk}(t)$ 作内积，分别得到

$$\langle f, \psi_{jk}^* \rangle = \sum_{m,n\in\mathbf{Z}} c_{mn} \langle \psi_{mn}, \psi_{jk}^* \rangle = c_{jk},$$

$$\langle f, \psi_{jk} \rangle = \sum_{m,n\in\mathbf{Z}} c_{mn}^* \langle \psi_{mn}^*, \psi_{jk} \rangle = c_{jk}^*.$$

因此，如果 $f(t)$ 按基 $\{\psi_{mn}(t),\ m,n \in \mathbf{Z}\}$ 展开，那么展开式的系数为 $\langle f, \psi_{mn}^* \rangle$，即

$$f(t) = \sum_{m,n\in\mathbf{Z}} \langle f, \psi_{mn}^* \rangle \psi_{mn}(t).$$

如果 $f(t)$ 按基 $\{\psi_{mn}^*(t),\ m,n \in \mathbf{Z}\}$ 展开，那么展开式的系数就是 $\langle f, \psi_{mn} \rangle$，即

$$f(t) = \sum_{m,n\in\mathbf{Z}} \langle f, \psi_{mn} \rangle \psi_{mn}^*(t).$$

特别，当 $\psi(t)$ 是自对偶时，就有

$$f(t) = \sum_{m,n\in\mathbf{Z}} \langle f, \psi_{mn} \rangle \psi_{mn}(t).$$

把 $L^2(\mathbf{R})$ 中的任一函数 $f(t)$ 展开为一个级数

$$f(t) = \sum_{m,n\in\mathbf{Z}} c_{mn}\psi_{mn}(t),$$

且系数 $\{c_{mn}\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$ 唯一，这无论是在理论上还是在实际应用中都是很有用的. 上述讨论表明，Riesz 小波 $\psi(t)$ 的二进伸缩与整数平移系 $\{\psi_{mn}(t),\ m,n \in \mathbf{Z}\}$ 能构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的 Riesz 基，$L^2(\mathbf{R})$ 中的任一函数按这个 Riesz 基展开，其系数唯一确定. 此外，Riesz 小波 $\psi(t)$ 必存在对偶小波 $\psi^*(t)$，其离散化序列 $\{\psi_{mn}^*(t),\ m,n \in \mathbf{Z}\}$ 也构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的 Riesz 基，称为 $\{\psi_{mn}(t),\ m,n \in \mathbf{Z}\}$ 的对偶基.

5.2.2 线性相位与对称性

当信号 $f(t)$ 通过一个具有线性相位或广义线性相位的滤波器时，其输出信号不会产生畸变，或者说用这样的滤波器处理信号时可以避免失真. 那么，什么是线性相位呢？线性相位与对称性有何联系？

我们知道，对于实函数 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$，如果

$$f(a+t)=f(a-t),\quad \forall t\in \mathbf{R},$$

则称 $f(t)$ 关于点 $t=a$ 具有**对称性**；如果

$$f(a+t)=-f(a-t),\quad \forall t\in \mathbf{R},$$

则称 $f(t)$ 关于点 $t=a$ 具有**反对称性**.

下面，我们先引进线性相位的概念，再讨论线性相位与对称性之间的关系.

定义 5.6 设函数 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，其 Fourier 变换 $\hat{f}(\omega)$ 满足

$$\hat{f}(\omega)=\pm|\hat{f}(\omega)|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega},\tag{5.18}$$

这里 $a\in\mathbf{R}$ 是常数，符号 $\pm$ 与 ω 无关，则称 $f(t)$ 具有**线性相位**. 又如果

$$\hat{f}(\omega)=B(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(a\omega+b)},\tag{5.19}$$

这里 $B(\omega)$ 是实值函数，$a,b\in\mathbf{R}$ 是常数，则称 $f(t)$ 具有**广义线性相位**. (5.18) 与(5.19) 式中的 a 称为 $\hat{f}(\omega)$ 的**相位**.

例 5.1 m 阶 B- 样条 $N_m(t)$ 具有线性相位，其对称点是 $\frac{m}{2}$（详见 3.5 节）. 这是因为

$$\hat{N}_m(\omega)=\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^m\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{m}{2}\omega}=\pm|\hat{N}_m(\omega)|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{m}{2}\omega}.$$

定义 5.7 对于实数序列 $\{a_k\}\in l^1$，如果其离散 Fourier 变换

$$A(\omega)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}$$

可以表示为

$$A(\omega)=\pm|A(\omega)|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\omega},\tag{5.20}$$

这里 $|A(\omega)|$ 是实值函数，$l\in\frac{1}{2}\mathbf{Z}$，符号 $\pm$ 与 ω 无关，则称 $\{a_k\}$ 具有**线性相位**. 如果 $A(\omega)$ 可以表示为

$$A(\omega)=B(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(l\omega+b)},\tag{5.21}$$

这里，$B(\omega)$ 是实值函数，$b\in\mathbf{R}$，$l\in\frac{1}{2}\mathbf{Z}$，则称 $\{a_k\}$ 具有**广义线性相位**. (5.20) 和(5.21) 式中的 l 称为 $A(\omega)$ 的**相位**.

定理 5.7 函数 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 具有广义线性相位当且仅当 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}f(t)$ 在

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}f(a+t)=\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}f(a-t)},\quad t\in\mathbf{R}\tag{5.22}$$

的意义下关于 a 是共轭对称的，其中 $a,b\in\mathbf{R}$.

证 设 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 具有广义线性相位，则由 $f(t)$ 的 Fourier 逆变换以

及(5.21)式得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}B(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(a\omega+b)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\omega}\mathrm{d}\omega,$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}f(a-t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}B(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\omega}\mathrm{d}\omega.$$

上式两端取复共轭，并注意到 $B(\omega)$ 是实值函数，即得(5.22)式.

反之，如果(5.22)式成立，那么对其两边取 Fourier 变换，得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(a-t)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega}}.$$

令 $B(\omega)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega}$，则 $B(\omega)$ 是实值函数，且 $\hat{f}(\omega)=B(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(a\omega+b)}$，所以 $f(t)$ 具有广义线性相位. ∎

如果 $f(t)$ 是实值函数，则由(5.22)式知，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2b}=\pm1$，所以 $f(t)$ 是对称或反对称的. 由此可得如下结论.

推论5.8 设 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 是实值函数，$\hat{f}(\omega)$ 是 $f(t)$ 的 Fourier 变换，则 $f(t)$ 具有广义线性相位且 a 是 $\hat{f}(\omega)$ 的相位当且仅当 $f(t)$ 关于点 $t=a$ 是对称或反对称的.

时域上的对称性或反对称性，在频域上表现为线性相位特性，这似乎很难让人理解. 下面，我们再举一个简单的例子，来说明它们之间的联系.

例 5.2 Haar 小波 $\psi(t)$ 关于点 $\frac{1}{2}$ 具有反对称性. 因为 $\psi(t)$ 的低通滤波器为

$$H(\omega)=\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2}=\begin{cases}|H(\omega)|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}, & \omega\in[0,\pi],\\ -|H(\omega)|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}, & \omega\in[\pi,2\pi],\end{cases}$$

所以，Haar 小波具有广义线性相位.

定理5.9 序列 $\{a_k\}\in l^1$ 具有广义线性相位当且仅当 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}a_k\}$ 在

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}a_k=\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}a_{2l-k}},\quad k\in\mathbf{Z}\tag{5.23}$$

的意义下关于 l 是共轭对称的，其中 $b\in\mathbf{R}$，$l\in\frac{1}{2}\mathbf{Z}$.

证 设 $\{a_k\}\in l^1$ 具有广义线性相位，则 $\{a_k\}$ 的离散 Fourier 变换 $A(\omega)$ 满足(5.21)式，故

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l\omega+b)}A(\omega)=B(\omega)=\overline{B(\omega)}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(l\omega+b)}\overline{A(\omega)},\tag{5.24}$$

即得(5.23)式.

反之，如果(5.23)式成立，那么(5.24)式成立，因此有

$$e^{i(l\omega+b)}A(\omega) = e^{-i(l\omega+b)}\overline{A(\omega)}.$$

令 $B(\omega) = e^{i(l\omega+b)}A(\omega)$，则 $B(\omega)$ 是实值函数，且

$$A(\omega) = B(\omega)e^{-i(l\omega+b)}.$$

∎

推论 5.10 设 $\{a_k\} \in l^1$ 是实值序列，$\{a_k\}$ 的离散 Fourier 变换为 $A(\omega)$，则 $\{a_k\}$ 具有广义线性相位且 k_0 是 $A(\omega)$ 的相位当且仅当 $\{a_k\}$ 关于 k_0 是对称或反对称的，即 $a_k = a_{2k_0-k}$.

由于正交性、紧支性和对称性都是小波基的十分重要的优良性质，我们自然希望正交小波能同时具有紧支性和对称性. 但这是不可能的，因为 Daubechies 已经明确地给出了如下结论：

定理 5.11 具有紧支集的实的正交小波，除 Haar 小波之外，都不可能具有线性相位.

证 设 $\psi(t)$ 是具有紧支集的正交小波，则 $\psi(t)$ 的滤波器系数是有限长的，不妨设为 $\{h_0, h_1, \cdots, h_{L-1}\}$，相应的低通滤波器为

$$H(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{L-1} h_k e^{-ik\omega}.$$

令 $z = e^{i\omega}$，并将 $H(\omega)$ 记为 $P(z)$，则

$$P(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{L-1} h_k z^{-k}.$$

根据正交性条件 $|H(\omega)|^2 + |H(\omega+\pi)|^2 = 1$，可知

$$|P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = 1, \quad |z| = 1. \tag{5.25}$$

现在记

$$P_e(z) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}} h_{2k} z^{-k}, \quad P_o(z) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}} h_{2k+1} z^{-k},$$

则

$$P(z) = P_e(z^2) + z^{-1}P_o(z^2). \tag{5.26}$$

将 $P(z)$ 的上述表示式代入(5.25)式，得

$$|P_e(z^2)|^2 + |P_o(z^2)|^2 = \frac{1}{2}, \quad |z| = 1. \tag{5.27}$$

假设 $\psi(t)$ 是实函数且具有线性相位，则由推论 5.8 知 $\psi(t)$ 是对称或反对称的. 注意到(3.75)式 $\sum_{k=0}^{L-1} h_k = 2$，所以 $\{h_0, h_1, \cdots, h_{L-1}\}$ 只能是对称序列.

于是有

$$h_k = h_{L-1-k}.$$

因为$\{h_k\}$是实数序列，所以容易推得

$$P(z) = z^{L-1}\,\overline{P(z)}, \quad |z| = 1$$

从而有

$$P_e(z^2) + z^{-1}P_o(z^2) = z^{L-1}\,\overline{P_e(z^2)} + z^L\,\overline{P_o(z^2)}. \tag{5.28}$$

若$L-1$为偶数，则$z^{L-1}\,\overline{P_e(z^2)}$仅含$z$的偶次幂，而$z^L\,\overline{P_o(z^2)}$仅含$z$的奇次幂. 故由(5.28)式得

$$P_e(z^2) = z^{L-1}\,\overline{P_e(z^2)},$$

$$P_o(z^2) = z^{L+1}\,\overline{P_o(z^2)},$$

这是不可能的.

若$L-1$为奇数，则由(5.28)式得

$$\begin{cases} P_e(z^2) = z^L\,\overline{P_o(z^2)}, \\ P_o(z^2) = z^L\,\overline{P_e(z^2)}, \end{cases} \quad |z| = 1.$$

代入(5.27)式得

$$|P_e(z^2)|^2 = |P_o(z^2)|^2 = \frac{1}{4}, \quad |z| = 1. \tag{5.29}$$

将$|P_e(z^2)|^2$和$|P_o(z^2)|^2$展开为z的多项式即可看出，由(5.29)式只能推得

$$h_0 = h_1 = 1, \quad h_2 = \cdots = h_{L-1} = 0.$$

因此，$\psi(t)$是Haar小波. 这就是说，除Haar小波外，实的紧支正交小波不可能具有线性相位. ∎

5.2.3 紧支对称双正交小波

对于双正交小波，由于放宽了正交性条件，我们可以选择有限长滤波器，使之具有对称性，也就是说，我们可以构造紧支对称双正交小波. Cohen，Daubechies和Feauveau于1992年提出了一种构造紧支对称双正交小波的方法，简称CDF方法. 现在我们就来介绍这种方法.

设双正交小波滤波器为$H(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}$与$H^*(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k^* \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}$，仿照定理3.5和定理3.6的证明可推得：双正交性条件(5.17)等价于

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k\,\overline{h_{k+2n}}^{\,*} = 2\delta_{n0}, \quad n \in \mathbf{Z}, \tag{5.30}$$

或

$$H(\omega)\overline{H^*(\omega)}+H(\omega+\pi)\overline{H^*(\omega+\pi)}=1. \tag{5.31}$$

现在考虑具有紧支集的双正交小波. 为确定起见，设相应的低通滤波器为

$$H(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{n=N_1}^{N_2}h_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega},\quad H^*(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{n=L_1}^{L_2}h_n^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega},$$

其中，N_2-N_1+1 与 L_2-L_1+1 分别为 $H(\omega)$ 与 $H^*(\omega)$ 的长度. 相应的高通滤波器分别为

$$G(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{k=1-L_2}^{1-L_1}g_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega},\quad G^*(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{k=1-N_2}^{1-N_1}g_k^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega},$$

其中 $g_k=(-1)^kh_{1-k}$，$g_k^*=(-1)^kh_{1-k}^*$. 所有系数全为实系数.

由归一化条件：$H(0)=H^*(0)=1$，及双正交条件可推得 $H(\pi)=H^*(\pi)=0$. 设小波函数 $\psi(t)$ 具有 N 阶消失矩，则又有

$$H(\omega)=\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2}\right)^N\Gamma(\omega). \tag{5.32}$$

类似地，若对偶小波 $\psi^*(t)$ 具有 N^* 阶消失矩，则对应的低通滤波器 $H^*(\omega)$ 满足

$$H^*(\omega)=\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2}\right)^{N^*}\Gamma^*(\omega). \tag{5.33}$$

在(5.32)与(5.33)式中，$\Gamma(\omega)$，$\Gamma^*(\omega)$ 均为变量 ω 的三角多项式.

在介绍紧支对称双正交小波的构造之前，先讨论关于滤波器 $H(\omega)$ 和 $H^*(\omega)$ 的长度之间的关系. 为简单起见，我们约定：若 $H(\omega)$ 的长度 $N_2-N_1+1=2M$ 为偶数，则取 $N_1=-M+1$ 与 $N_2=M$；若 $H(\omega)$ 的长度 $N_2-N_1+1=2M+1$ 为奇数，则取 $N_1=-M$ 与 $N_2=M$. 对于 $H^*(\omega)$ 的长度也作类似的约定.

定理5.12 (1) 若滤波器 $H(\omega)$ 与 $H^*(\omega)$ 均为奇数长且支撑集关于0对称，则它们的长度之差必为2的奇数倍；(2) 若滤波器 $H(\omega)$ 与 $H^*(\omega)$ 均为偶数长且支撑集关于 $\frac{1}{2}$ 对称，则它们的长度之差必为2的偶数倍.

证 这里只证(1)，同理可证(2). 设 $H(\omega)$ 与 $H^*(\omega)$ 的长度分别为 $2M+1$ 与 $2M^*+1$，不妨设 $M\geqslant M^*$，则

$$-N_1=N_2=M,\quad -L_1=L_2=M^*.$$

由于 $\{h_k\}$ 与 $\{h_k^*\}$ 均为实序列，所以双正交条件(5.30)可改写为

$$\sum_{k=-M}^{M} h_k h^*_{k+2n} = 2\delta_{n0}, \quad n = 0,1,2,\cdots. \tag{5.34}$$

若 $H(\omega)$ 与 $H^*(\omega)$ 的长度之差 $2M-2M^*$ 为 2 的偶数倍即 $M-M^*=2m$，其中 $m \in \mathbf{Z}^+$，取 $n=m+M^*$，则(5.34)式左端仅有一项非零，即 $h_{-M}h^*_{M^*} \neq 0$，而右端 $\delta_{m+M^*,0}=0$，矛盾. 因此 $M-M^*$ 必为奇数，从而结论成立. ∎

事实上，还可进一步证明：滤波器 $H(\omega)$ 与 $H^*(\omega)$ 只能是同为偶数长或者同为奇数长.

定理5.13 (1) 滤波器为奇数长且关于 0 对称的双正交小波其消失矩阶数必为偶数；(2) 滤波器为偶数长且关于 $\frac{1}{2}$ 对称的双正交小波其消失矩阶数必为奇数.

证 先证结论(1). 设 $H(\omega)$ 为奇数长且关于 0 对称，则

$$H(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{n=-M}^{M} h_n \cos n\omega = \frac{1}{2}h_0 + \sum_{n=1}^{M} h_n \cos n\omega,$$

从而

$$\left.\frac{\mathrm{d}^{2k+1}H(\omega)}{\mathrm{d}\omega^{2k+1}}\right|_{\omega=\pi} = 0, \quad k=0,1,2,\cdots$$

恒成立. 由于 $H(\pi)=0$，因此使得 $\left.\frac{\mathrm{d}^n H(\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}\right|_{\omega=\pi} \neq 0$ 的最小正整数 n 必为偶数. 这表明小波函数的消失矩阶数必为偶数.

再证结论(2). 设 $H(\omega)$ 的长度为 $2M$，且

$$H(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{n=-M+1}^{M} h_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega},$$

由于 $H(\omega)$ 关于 $\frac{1}{2}$ 对称，因此有 $h_n = h_{1-n}$，于是得到

$$H(\omega) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\omega}{2}}\sum_{n=1}^{M} h_n \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega = a(\omega)b(\omega),$$

其中

$$a(\omega) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\omega}{2}}, \quad b(\omega) = \sum_{n=1}^{M} h_n \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega.$$

由于 $\left.\frac{\mathrm{d}^k a(\omega)}{\mathrm{d}\omega^k}\right|_{\omega=\pi} \neq 0$，而 $\left.\frac{\mathrm{d}^{2k} b(\omega)}{\mathrm{d}\omega^{2k}}\right|_{\omega=\pi} = 0$ 对于任意自然数 $k \geqslant 0$ 恒成立，故由 Leibniz 公式得：对于任意自然数 n 有

$$H^{(2n)}(\pi) = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} 2n \\ 2k-1 \end{bmatrix} a^{(2k-1)}(\pi) b^{(2n-2k+1)}(\pi)$$

$$\triangleq \sum_{k=1}^{n} d_{2k-1}^{(2n)} b^{(2k-1)}(\pi),$$

$$H^{(2n-1)}(\pi) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}_{2k-1}^{(2n-1)} b^{(2k-1)}(\pi), \tag{5.35}$$

其中 $d_{2k-1}^{(2n)}$ 与 $\mathrm{e}_{2k-1}^{(2n-1)}$ 均为非零常数. 特别地，取 $n=1$，则当且仅当 $b^{(1)}(\pi)=0$ 时，$H^{(1)}(\pi)=0$. 对于上式作进一步的递推，可以建立如下结论：当且仅当 $b(\pi)=b^{(1)}(\pi)=\cdots=b^{(2k+1)}(\pi)=0$ 时，

$$H^{(1)}(\pi) = H^{(2)}(\pi) = \cdots = H^{(2k+1)}(\pi) = 0.$$

同理可得 $H^{(2k+2)}(\pi)=0$. 又因为 $H(\pi)=0$，所以使得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^n H(\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}\right|_{\omega=\pi} \neq 0$ 的最小正整数 n 必为奇数. 这表明小波函数的消失矩阶数为奇数. ▮

下面，我们讨论紧支对称双正交小波的构造，即 CDF 方法.

由于滤波器 $H(\omega)$ 与 $H^*(\omega)$ 的长度具有相同的奇偶性，所以我们分两种情形讨论.

情形 Ⅰ $H(\omega)$ 与 $H^*(\omega)$ 都为奇数长且关于 0 对称. 此时，有

$$H(-\omega) = H(\omega), \quad H^*(-\omega) = H^*(\omega).$$

若 $H(\omega)$ 和 $H^*(\omega)$ 的消失矩阶数分别为 N 和 N^*，则根据(5.32) 与(5.33) 式可将 $H(\omega)$ 和 $H^*(\omega)$ 表示为

$$\begin{cases} H(\omega) = \left(\cos\dfrac{\omega}{2}\right)^{2N} Q(\cos\omega), \\ H^*(\omega) = \left(\cos\dfrac{\omega}{2}\right)^{2N^*} Q^*(\cos\omega), \end{cases} \tag{5.36}$$

其中 $Q(\cos\omega)$,$Q^*(\cos\omega)$ 为 $\cos\omega$ 的多项式.

将(5.36) 式代入(5.31) 式，得

$$\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2L} Q(\cos\omega)\overline{Q^*(\cos\omega)} + \left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2L} Q(-\cos\omega)\overline{Q^*(-\cos\omega)} = 1, \tag{5.37}$$

其中，$L=N+N^*$. 令 $y=\sin^2\dfrac{\omega}{2}$，及

$$P\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right) = Q(\cos\omega)\overline{Q^*(\cos\omega)}, \tag{5.38}$$

则(5.37) 式可改写为

$$(1-y)^L P(y) + y^L P(1-y) = 1.$$

这就是我们在第四章已经讨论过的方程(4.9)，其解为

$$P(y)=\sum_{n=0}^{L-1}\begin{pmatrix}L-1+n\\ n\end{pmatrix}y^n+y^L U(y),$$

其中，多项式$U(y)$满足$U(y)+U(1-y)=0$. 一般地，我们总是取$U(y)=0$，所以有

$$P(y)=\sum_{n=0}^{L-1}\begin{pmatrix}L-1+n\\ n\end{pmatrix}y^n. \tag{5.39}$$

情形 Ⅱ $H(\omega)$ 与 $H^*(\omega)$ 都为偶数长且关于$\frac{1}{2}$对称. 此时，有

$$H(-\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}H(\omega),\quad H^*(-\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}H^*(\omega).$$

若 $H(\omega)$ 和 $H^*(\omega)$ 的消失矩阶数分别为 N 和 N^*，则根据(5.32)与(5.33)式可将 $H(\omega)$ 和 $H^*(\omega)$ 表示为

$$\begin{cases}H(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2N+1}Q(\cos\omega),\\ H^*(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2N^*+1}Q^*(\cos\omega),\end{cases} \tag{5.40}$$

其中 $Q(\cos\omega)$,$Q^*(\cos\omega)$ 为 $\cos\omega$ 的多项式.

将(5.40)式代入(5.31)式，得

$$\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2L}Q(\cos\omega)\overline{Q^*(\cos\omega)}+\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2L}Q(-\cos\omega)\overline{Q^*(-\cos\omega)}=1, \tag{5.41}$$

其中，$L=N+N^*+1$.

我们看到，方程(5.41)与(5.37)在形式上完全一样，只是 L 的意义不同. 所以接下来的讨论只需重复情形 Ⅰ 即可. 这就是说，对于情形 Ⅱ 也有形如(5.39)的解.

于是，利用 CDF 方法构造紧支对称双正交小波的主要步骤可归纳为:

(1) 选取 L，利用(5.39)式写出 $P(y)$ 的表达式;

(2) 将 $P(y)$ 分解为两个实系数多项式因子之积，其中之一作为 $Q(\cos\omega)$，另一个作为 $Q^*(\cos\omega)$. 不失一般性，设 $P(y)$ 有 K_1 个实根，K_2 对共轭复根，即

$$P(y)=A\prod_{m=1}^{K_1}(y-y_m)\prod_{n=1}^{K_2}(y^2-2y\,\mathrm{Re}\,z_n+|z_n|^2), \tag{5.42}$$

其中 A 为实常数，$K_1+2K_2=L-1$，则每一个实根对应一个一次因式，每一对共轭复根对应一个二次因式. 可见，分解式(5.42)为我们提供了多种不同形式的 $Q(\cos\omega)$ 与 $Q^*(\cos\omega)$.

(3) 根据 $L=N+N^*$ (情形 Ⅰ) 或 $L=N+N^*+1$ (情形 Ⅱ) 确定正

整数解 N 与 N^*（解不唯一）．将每一组解(N,N^*)与上一步所确定的每一对因子 $Q(\cos\omega)$，$Q^*(\cos\omega)$ 代入(5.36)或(5.40)式便得到 $H(\omega)$ 和 $H^*(\omega)$，从而构造出紧支对称双正交小波．

例 5.3 现以 $L=3$ 为例，说明上述 CDF 方法的实现过程．

首先，由(5.39)式得

$$P(y)=1+3y+6y^2.$$

显然，$P(y)$ 只有一对共轭复根(即 $K_1=0$，$K_2=1$)，分解式唯一，所以我们取

$$Q(\cos\omega)=1,\quad Q^*(\cos\omega)=P\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right).$$

易知

$$P\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)=\frac{3}{8}(e^{i2\omega}+e^{-i2\omega})-\frac{18}{8}(e^{i\omega}+e^{-i\omega})+\frac{38}{8}. \tag{5.43}$$

根据 $L=N+N^*$ 或 $L=N+N^*+1$ 的正整数解(N,N^*)，只有三种可能：

(1) $N=N^*=1$．这属于情形 Ⅱ，此时由(5.40)得

$$H(\omega)=e^{-i\frac{\omega}{2}}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^3=\frac{1}{8}(e^{-i2\omega}+3e^{-i\omega}+3+e^{i\omega}),$$

$$\begin{aligned}H^*(\omega)&=e^{-i\frac{\omega}{2}}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^3P\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)\\&=\frac{1}{64}(3e^{-i4\omega}-9e^{-i3\omega}-7e^{-i2\omega}+45e^{-i\omega}\\&\quad+45-7e^{i\omega}-9e^{i2\omega}+3e^{i3\omega}).\end{aligned}$$

(2) $N=0$，$N^*=2$．这也属于情形 Ⅱ，此时仍由(5.40)得

$$H(\omega)=e^{-i\frac{\omega}{2}}\cos\frac{\omega}{2}=\frac{1}{2}(e^{-i\omega}+1),$$

$$\begin{aligned}H^*(\omega)&=e^{-i\frac{\omega}{2}}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^5P\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)\\&=\frac{1}{256}(3e^{-i5\omega}-3e^{-i4\omega}-22e^{-i3\omega}+22e^{-i2\omega}+128e^{-i\omega}\\&\quad+128+22e^{i\omega}-22e^{i2\omega}-3e^{i3\omega}+3e^{i4\omega}).\end{aligned}$$

交换 N 与 N^*，即 $N=2$，$N^*=0$，则有

$$\begin{aligned}H(\omega)&=e^{-i\frac{\omega}{2}}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^5\\&=\frac{1}{32}(e^{-i3\omega}+5e^{-i2\omega}+10e^{-i\omega}+10+5e^{i\omega}+e^{i2\omega}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H^*(\omega)&=e^{-i\frac{\omega}{2}}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)P\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)\\&=\frac{1}{16}(3e^{-i3\omega}-15e^{-i2\omega}+20e^{-i\omega}+20-15e^{i\omega}+3e^{i2\omega}).\end{aligned}$$

(3) $N=1$, $N^*=2$. 这属于情形 Ⅰ，此时由(5.36)得

$$H(\omega)=\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}+2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}),$$

$$\begin{aligned}H^*(\omega)&=\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^4P\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)\\&=\frac{1}{128}(3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}4\omega}-6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\omega}-16\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega}+38\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}+90\\&\quad+38\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}-16\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega}-6\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\omega}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\omega}).\end{aligned}$$

交换 N 与 N^*，即 $N=2$, $N^*=1$，则有

$$\begin{aligned}H(\omega)&=\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^4\\&=\frac{1}{16}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega}+4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}+6+4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H^*(\omega)&=\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^2P\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)\\&=\frac{1}{32}(3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\omega}-12\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega}+5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}+36\\&\quad+5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}-12\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\omega}).\end{aligned}$$

下面给出三种具有实际意义的特殊双正交小波的例子.

(1) **样条双正交小波** 取 $Q(y)\equiv 1$，则

$$Q^*(\cos\omega)=P\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right).$$

从而有

$$H(\omega)=\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2N}\quad 或\quad H(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2N+1},$$

其中 $N\in\mathbf{Z}^+$. 此时对应的尺度函数 $\varphi(t)$ 分别是关于 0 或者关于 $\frac{1}{2}$ 对称的 B-样条，因而小波 $\psi(t)$ 也是具有紧支撑的样条函数.

对于第一种情形，有

$$H^*(\omega)=\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2N^*}\sum_{n=0}^{L-1}\begin{bmatrix}L+n-1\\n\end{bmatrix}\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)^n,$$

其中 $L=N+N^*$, $N^*\in\mathbf{Z}^+$. 对于第二种情形，有

$$H^*(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2N^*+1}\sum_{n=0}^{L-1}\begin{bmatrix}L+n-1\\n\end{bmatrix}\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)^n,$$

其中 $L=N+N^*+1$. 表 5-1 列出了一系列双正交小波所对应的低通滤波器，其中 $z=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}$.

表 5-1 常见紧支集双正交样条小波所对应的低通滤波器

N	$H(z)$	N^*	$H^*(z)$
1	$\frac{1}{2}(1+z)$	1	$\frac{1}{2}(1+z)$
		3	$-\frac{z^{-2}}{16}+\frac{z^{-1}}{16}+\frac{1}{2}+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{16}-\frac{z^3}{16}$
		5	$\frac{3}{256}z^{-4}-\frac{3}{256}z^{-3}-\frac{11}{128}z^{-2}+\frac{11}{128}z^{-1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z+\frac{11}{128}z^2-\frac{11}{128}z^3-\frac{3}{256}z^4+\frac{3}{256}z^5$
2	$\frac{1}{4}(z^{-1}+2+z)$	2	$-\frac{1}{8}z^{-2}+\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}z-\frac{1}{8}z^2$
		4	$\frac{3}{128}z^{-4}-\frac{3}{64}z^{-3}-\frac{1}{8}z^{-2}+\frac{19}{64}z^{-1}+\frac{45}{64}+\frac{19}{64}z-\frac{1}{8}z^2-\frac{3}{64}z^3+\frac{3}{128}z^4$
		6	$-\frac{5}{1024}z^{-6}+\frac{5}{512}z^{-5}+\frac{17}{512}z^{-4}-\frac{39}{512}z^{-3}-\frac{123}{1024}z^{-2}+\frac{81}{256}z^{-1}+\frac{175}{256}+\frac{81}{256}z-\frac{123}{1024}z^2+\cdots$
		8	$2^{-15}(35z^{-8}-70z^{-7}-300z^{-6}+670z^{-5}+1228z^{-4}-3126z^{-3}-3796z^{-2}+10718z^{-1}+22050+10718z-3796z^2+\cdots)$
3	$\frac{1}{8}(z^{-1}+3+3z+z^2)$	1	$-\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}z-\frac{1}{4}z$
		3	$\frac{3}{64}z^{-3}-\frac{9}{64}z^{-2}-\frac{7}{64}z^{-1}+\frac{45}{64}+\frac{45}{64}z-\frac{7}{64}z^2-\frac{9}{64}z^3+\frac{3}{64}z^4$
		5	$-\frac{5}{512}z^{-5}+\frac{15}{512}z^{-4}+\frac{19}{512}z^{-3}-\frac{97}{512}z^{-2}-\frac{13}{256}z^{-1}+\frac{175}{256}+\frac{175}{256}z-\frac{13}{256}z^2-\frac{97}{512}z^3+\cdots$
		7	$2^{-14}(35z^{-7}-105z^{-6}-195z^{-5}+865z^{-4}+336z^{-3}-3489z^{-2}-307z^{-1}+11025+11025z-307z^2+\cdots)$
		9	$2^{-17}(-63z^{-9}+189z^{-8}+469z^{-7}-1911z^{-6}-1308z^{-5}+9188z^{-4}+1140z^{-3}-29676z^{-2}+190z^{-1}+87318+87318z+190z^2+\cdots)$

(2) **滤波器长度比较接近的情形** 一般情况下，所得到的双正交小波函数对并不唯一，其唯一性取决于滤波器长度和消失矩阶数. 当 $L\geqslant 4$ 时，在(5.38)中，将 $P\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)$ 分解为两个次数相近的多项式 $Q(\cos\omega)$ 和 $Q^*(\cos\omega)$，就可得到长度比较接近的双正交滤波器 $H(\omega)$ 与 $H^*(\omega)$，但这时系数 $\{h_k\}$ 与 $\{h_k^*\}$ 不再是有理数. 例如，当分解与重构端滤波器长度分别为 9 和 7 以及消失矩阶数均为 4 时，紧支对称双正交小波是唯一的，所得到的解即为 CDF9/7 双正交小波，相应的低通滤波器系数的一种有理近似如表 5-2 所示.

表 5-2 **CDF9/7 双正交小波的滤波器系数**

k	$\frac{1}{2}h_k^*$	$\frac{1}{2}h_k$
0	0.602 949 018 236	0.557 543 526 229
−1,1	0.266 864 118 443	0.295 635 881 557
−2,2	−0.078 223 266 529	−0.028 771 763 114
−3,3	−0.016 864 118 443	−0.045 635 881 557
−4,4	0.026 748 757 411	0

(3) **接近 Coiflet 的双正交小波** Burt 和 Adelson 构造了一种双正交小波，其滤波器系数如表 5-3 所示，其中第 3 栏为 Coiflet 滤波器系数. 从表中所列数据可以看出，Burt 和 Adelson 构造的双正交小波不仅是紧支对称的，而且与 Coiflet 正交小波很接近.

表 5-3 **Burt 双正交滤波器系数(第 3 栏为 Coiflet 滤波器系数)**

k	$\frac{1}{2}h_k$	$\frac{1}{2}h_k^*$	$\frac{1}{2}h_k$
−3	0.00	−0.010 714 285 714	0
−2	−0.05	−0.053 571 428 571	−0.051 429 728 471
−1	0.25	0.260 714 285 714	0.238 929 728 471
0	0.60	0.607 142 857 143	0.602 859 456 942
1	0.25	0.260 714 285 714	0.272 140 543 058
2	−0.05	−0.053 571 428 571	−0.051 429 972 847
3	0.00	−0.010 714 285 714	−0.011 070 271 529

这个例子表明，紧支对称的接近正交的滤波器确实存在，对应的双正交小波接近正交小波而保持双正交小波的所有优良性质. 事实上，根据 4.5 节

的分析，有

$$H(\omega)=\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2K}\left[\sum_{n=0}^{K-1}\begin{bmatrix}K-1+n\\ n\end{bmatrix}\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2n}+O\left(\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2K}\right)\right],\tag{5.44}$$

特别地，可选择

$$H(\omega)=\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2K}\left[\sum_{n=0}^{K-1}\begin{bmatrix}K-1+n\\ n\end{bmatrix}\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2n}+a\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2K}\right],\tag{5.45}$$

由此得到计算滤波器系数$\{h_k\}$和$\{h_k^*\}$的下列步骤：

(1) 确定a使得

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}(1-|H(\omega)|^2-|H(\omega+\pi)|^2)\mathrm{d}\omega\right|$$

取最小值. 对于$K=1,2,3$，可分别求得a的值为

0.861001748086， 3.328450120793， 13.113494845221.

(2) 用较为简单的有理数代替上述a的值. 例如，$K=1$时，取$a=\frac{4}{5}$；$K=2$时，取$a=\frac{16}{5}$；$K=3$时，取$a=13$.

(3) 计算$H^*(\omega)$. 若要求$H^*(\omega)$也具有因子$\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2K}$，则

$$H^*(\omega)=\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2K}U_K\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)\tag{5.46}$$

其中$U_K(y)$是一个$3K-1$次多项式. 利用Daubechies的分析方法(见文献[48])，可以得出

$$U_K(y)=\sum_{n=0}^{K-1}\begin{bmatrix}K-1+n\\ n\end{bmatrix}y^n+O(y^K).\tag{5.47}$$

这就确定了$U_K(y)$的$3K$个系数中的K个，其余系数也容易求出. 最后代入(5.46)式即可求得$H^*(\omega)$的表达式. 例如，对于$K=1$，有

$$U_1(y)=1+\frac{6}{5}y-\frac{24}{35}y^2,$$

所以

$$\begin{aligned}H^*(\omega)&=\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^2\left(1+\frac{6}{5}\sin^2\frac{\omega}{2}-\frac{24}{35}\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)^2\right)\\&=\frac{1}{280}(-3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\omega}-15\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega}+73\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}+170\\&\quad+73\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}-15\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega}-3\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\omega}).\end{aligned}$$

对于 $K=2$ 和 3，分别有

$$U_2(y)=1+2y+\frac{14}{5}y^2+8y^3-\frac{8\,024}{455}y^4+\frac{3\,776}{455}y^5,$$

$$U_3(y)=1+3y+6y^2+7y^3+30y^4+42y^5$$
$$-\frac{1\,721\,516}{6\,075}y^6+\frac{1\,921\,766}{6\,075}y^7-\frac{648\,908}{6\,075}y^8.$$

文献[37],[49]给出了相应的滤波器系数$\{h_k\}$和$\{h_k^*\}$，并与Coiflet正交小波进行了比较. 值得注意的是，这里的双正交滤波器 $H(\omega),H^*(\omega)$ 的计算比Daubechies关于Coiflet正交滤波器的计算要简单得多. 所以双正交小波基的构造比正交小波基的构造具有更大的灵活性.

5.3 半正交小波

5.3.1 Riesz小波的分类

正交小波具有极好的性质，其二进伸缩和整数平移系$\{\psi_{mn}(t),\ m,n\in\mathbf{Z}\}$能构成空间$L^2(\mathbf{R})$的标准正交基(即正交小波基)，信号$f(t)\in L^2(\mathbf{R})$在这个基下的展开式

$$f(t)=\sum_{m,n\in\mathbf{Z}}\langle f,\psi_{mn}\rangle\psi_{mn}(t)$$

对信号的局部性分析起着极为重要的作用. 但正如我们在前两章已经看到的，要使一个函数 $\psi(t)$ 的二进伸缩和整数平移系

$$\psi_{mn}(t)=2^{\frac{m}{2}}\psi(2^mt-n),\quad m,n\in\mathbf{Z}\tag{5.48}$$

能构成$L^2(\mathbf{R})$的标准正交基实乃相当困难. 何况还进一步希望$\psi(t)$具有良好的局部性、光滑性、对称性等，这就给正交小波 $\psi(t)$ 的构造带来了极大的困难. 因此，前面5.1节和5.2节在摒弃正交性的前提下，构造出具有紧支性、对称性、高阶消失矩等优良性质的小波，并且所使用的方法具有更大的灵活性.

下面，我们进一步讨论与正交性有关的问题.

我们知道，离散小波的一个重要作用就是将$L^2(\mathbf{R})$中的函数展开成一个级数 $f(t)=\sum\limits_{m,n\in\mathbf{Z}}c_{mn}\psi_{mn}(t)$ 的形式，要达到这个目的，当然要求生成$\psi_{mn}(t)$的小波母函数 $\psi(t)$ 是一个R函数，因为R函数可以生成$L^2(\mathbf{R})$的一个Riesz基.

定义 5.8 设 $\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 是一个 R 函数，而 $\psi_{mn}(t)$ 如(5.48)式所定义. $\forall m,n,j,k\in\mathbf{Z}$，若

$$\langle\psi_{mn},\psi_{jk}\rangle=\delta_{mj}\cdot\delta_{nk},\tag{5.49}$$

则称 $\psi(t)$ 为一个**正交小波**；若

$$\langle\psi_{mn},\psi_{jk}\rangle=0,\quad\forall m\neq j,\tag{5.50}$$

则称 $\psi(t)$ 为一个**半正交小波**.

对于一个 Riesz 小波 $\psi(t)$，即使既不是正交小波又不是半正交小波，也还存在对偶小波 $\psi^*(t)$ 满足双正交性条件(5.17)式

$$\langle\psi_{mn},\psi_{jk}^*\rangle=\delta_{mj}\cdot\delta_{nk},$$

因此，Riesz 小波可分为三大类，即正交小波，半正交小波，双正交小波.

根据第三章的讨论可知，一个正交小波 $\psi(t)$ 可以确定 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个正交分解：$L^2(\mathbf{R})=\bigoplus_{m\in\mathbf{Z}}W_m$，其中小波子空间列$\{W_m\}$是两两正交的，即当 $m\neq l$ 时，$W_m\perp W_l$，而且$\{\psi_{mn}(t),\ n\in\mathbf{Z}\}$ 就是 W_m 的一个标准正交基. 因此，对于任一 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，有正交分解

$$f(t)=\sum_{m\in\mathbf{Z}}g_m(t),$$

其中 $g_m(t)\in W_m$ 是 $f(t)$ 在子空间 W_m 中的分量：

$$g_m(t)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\langle f,\psi_{mn}\rangle\psi_{mn}(t),$$

且当 $m\neq l$ 时，$\langle g_m,g_l\rangle=0$. 由此可见，正交小波关于两个下标的正交性(5.49)包含了两个意义：关于第一个下标的正交性，实际上就是实现了 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个正交分解：$L^2(\mathbf{R})=\bigoplus_{m\in\mathbf{Z}}W_m$；关于第二个下标的正交性，就是确定了 W_m 的标准正交基.

一个半正交小波 $\psi(t)$，由于(5.50)式表明的仍然是关于第一个下标的正交性，所以同样可以确定 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个正交分解：$L^2(\mathbf{R})=\bigoplus_{m\in\mathbf{Z}}W_m$，即当 $m\neq l$ 时，$W_m\perp W_l$，其中 $W_m=\overline{\mathrm{span}}\{\psi_{mn}(t),\ n\in\mathbf{Z}\}$，但$\{\psi_{mn}(t),\ n\in\mathbf{Z}\}$ 仅仅是 W_m 的 Riesz 基而不是标准正交基. 这在有些情况下也就够了.

5.3.2 半正交小波的性质

下面讨论半正交小波的一些性质.

定理5.14 设 $\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})$，则下列命题相互等价：

(1) $\{\psi(t-n)\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 是标准正交系，即$\langle\psi(t-k),\psi(t-l)\rangle=\delta_{kl}$；

(2) $$\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(\omega+2k\pi)|^2\equiv1;\tag{5.51}$$

(3) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{\psi}(\omega)|^2 e^{-i(k-l)\omega}d\omega=\delta_{kl}$. (5.52)

证 由定理 2.6 即知(1)与(2)等价，下证(1)与(3)等价.

利用 Parseval 等式，有

$$\begin{aligned}\langle\psi(t-k),\psi(t-l)\rangle &= \frac{1}{2\pi}\langle\hat{\psi}(\omega)e^{-ik\omega},\hat{\psi}(\omega)e^{-il\omega}\rangle\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}(\omega)e^{-ik\omega}\,\overline{\hat{\psi}(\omega)e^{-il\omega}}\,d\omega\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{\psi}(\omega)|^2 e^{-i(k-l)\omega}d\omega,\end{aligned}$$

所以$\langle\psi(t-k),\psi(t-l)\rangle=\delta_{kl}$的充分必要条件是

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{\psi}(\omega)|^2 e^{-i(k-l)\omega}d\omega=\delta_{kl}.$$ ∎

上述条件是$\psi(t)$的整数平移$\{\psi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$构成子空间$W_0$的标准正交基的充分必要条件. 放宽一点要求，$\{\psi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$成为$W_0$的Riesz基的条件又是什么呢?

定理5.15 设$\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})$，$A$与$B$是正常数，则下述命题相互等价:

(1) $\{\psi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$满足Riesz条件(即可以构成某一子空间的Riesz基)：即对任意序列$\boldsymbol{c}=\{c_k\}\in l^2$，都有

$$A\|\boldsymbol{c}\|_{l^2}^2\leqslant\Big\|\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k\psi(t-k)\Big\|_{L^2(\mathbf{R})}^2\leqslant B\|\boldsymbol{c}\|_{l^2}^2,\quad(5.53)$$

其中 $\|\boldsymbol{c}\|_{l^2}^2$ 表示$\boldsymbol{c}=\{c_k\}$的范数 $\|\boldsymbol{c}\|_{l^2}^2=\Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}}|c_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$;

(2) $\psi(t)$的 Fourier 变换$\hat{\psi}(\omega)$满足

$$0<A\leqslant\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(\omega+2k\pi)|^2\leqslant B<+\infty.\quad(5.54)$$

证 详见文献[34]定理 3.24 的证明. ∎

这就是说，一个函数$\psi(t)\in W_0\subseteq L^2(\mathbf{R})$，如果满足条件(5.51)或(5.52)式，那么$\{\psi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$构成子空间$W_0$的标准正交系. 如果仅满足条件(5.53)或(5.54)式，则$\{\psi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$构成子空间$W_0$的Riesz系.

对于离散小波$\{\psi_{mn}(t)\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$，重要的是把$L^2(\mathbf{R})$中的任一函数$f(t)$按$\psi_{mn}(t)$展开为一个小波级数$f(t)=\sum_{m,n\in\mathbf{Z}}c_{mn}\psi_{mn}(t)$，并且系数$c_{mn}$要能比较方便地求出. 为了达到这一目的，关键在于求出$\psi(t)$的对偶$\psi^*(t)$，这是因为

$$f(t)=\sum_{m,n\in\mathbf{Z}}\langle f,\psi_{mn}^*\rangle\psi_{mn}(t)=\sum_{m,n\in\mathbf{Z}}\langle f,\psi_{mn}\rangle\psi_{mn}^*(t).$$

对于正交小波，由于是自对偶的，不存在任何问题. 对于半正交小波，其对偶如何得到呢?

定理5.16 设 $\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 是一个半正交小波，则

$$\hat{\psi}^*(\omega)=\frac{\hat{\psi}(\omega)}{\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(\omega+2k\pi)|^2} \tag{5.55}$$

的 Fourier 逆变换 $\psi^*(t)$ 是 $\psi(t)$ 的对偶小波.

证 因为 $\psi(t)$ 是半正交小波，所以 $\{\psi_{mn}(t)\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 Riesz 基，从而 $\{\psi_{0,n}(t)\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 满足 Riesz 条件(5.53). 根据定理 5.15，其等价性条件为: 存在正常数 A,B，使

$$0<A\leqslant\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(\omega+2k\pi)|^2\leqslant B<+\infty.$$

根据 Parseval 等式，有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi^*(t)|^2\mathrm{d}t&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{\psi}^*(\omega)|^2\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\hat{\psi}(\omega)}{\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(\omega+2k\pi)|^2}\right|^2\mathrm{d}\omega\\&\leqslant\frac{1}{2\pi A^2}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{\psi}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{A^2}\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(t)|^2\mathrm{d}t<+\infty,\end{aligned}$$

所以 $\psi^*(t)\in L^2(\mathbf{R})$.

下面再证明双正交性条件(5.17) 式成立. 由(5.55) 式易知,

$$\psi^*(t)=\sum_{p\in\mathbf{Z}}a_p\psi(t-p),$$

其中

$$a_p=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pt}}{\sum\limits_{l\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(t+2l\pi)|^2}\,\mathrm{d}t,\quad\forall p\in\mathbf{Z}.$$

于是有

$$\langle\psi_{mn},\psi_{jk}^*\rangle=\langle\psi_{mn},\sum_{p\in\mathbf{Z}}a_{p-k}\psi_{jp}\rangle=\sum_{p\in\mathbf{Z}}\overline{a_{p-k}}\langle\psi_{mn},\psi_{jp}\rangle.$$

当 $m\neq j$ 时，注意到 $\psi(t)$ 是半正交小波，$\langle\psi_{mn},\psi_{jp}\rangle=0$，所以 $\forall n,k\in\mathbf{Z}$，有 $\langle\psi_{mn},\psi_{jk}^*\rangle=0$. 当 $m=j$ 时，有

$$
\begin{aligned}
\langle \psi_{mn}, \psi_{mk}^{*} \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2^{\frac{m}{2}} \psi(2^m t - n) \cdot 2^{\frac{m}{2}} \overline{\psi^{*}(2^m t - k)}\, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(2^m t - n) \overline{\psi^{*}(2^m t - k)}\, \mathrm{d}(2^m t) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t-n) \overline{\psi^{*}(t-k)}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(\omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)\omega} \overline{\hat{\psi}^{*}(\omega)}\, \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{p\in\mathbf{Z}} \int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} \hat{\psi}(\omega) \overline{\hat{\psi}^{*}(\omega)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)\omega} \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \sum_{p\in\mathbf{Z}} \hat{\psi}(\omega + 2p\pi) \overline{\hat{\psi}^{*}(\omega + 2p\pi)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)\omega} \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \sum_{p\in\mathbf{Z}} \hat{\psi}(\omega + 2p\pi) \frac{\overline{\hat{\psi}(\omega + 2p\pi)}}{\sum\limits_{s\in\mathbf{Z}} |\hat{\psi}(\omega + 2p\pi + 2s\pi)|^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)\omega} \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{\sum\limits_{p\in\mathbf{Z}} |\hat{\psi}(\omega + 2p\pi)|^2}{\sum\limits_{p\in\mathbf{Z}} |\hat{\psi}(\omega + 2p\pi)|^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)\omega} \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)\omega} \mathrm{d}\omega = \delta_{nk}.
\end{aligned}
$$

综合上述，$\psi(t)$ 与 $\psi^{*}(t)$ 满足双正交性条件(5.17)，即

$$
\langle \psi_{mn}, \psi_{jk}^{*} \rangle = \begin{cases} 0, & m \neq j, \\ \delta_{nk}, & m = j \end{cases} = \delta_{mj} \cdot \delta_{nk}.
$$

因此，$\psi^{*}(t)$ 是 $\psi(t)$ 的对偶小波. ■

对于半正交小波 $\psi(t)$，根据第三章的正交化公式(3.14)，令

$$
\hat{\psi}_1(\omega) = \frac{\hat{\psi}(\omega)}{\sqrt{\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} |\hat{\psi}(\omega + 2k\pi)|^2}},
$$

其 Fourier 逆变换 $\psi_1(t)$ 是正交小波，因而是自对偶的. 但由定理 5.16 可知，这个正交化公式仅仅是对半正交小波 $\psi(t)$ 才有效(正交小波也是半正交小波). 如果 $\psi(t)$ 是双正交小波，那么这个正交化公式是无效的. 换句话说，这个正交化公式可以把 $L^2(\mathbf{R})$ 的子空间的 Riesz 基化为正交基，但不可能使 $L^2(\mathbf{R})$ 的非正交分解转化为正交分解.

我们已经知道，由信号 $f(t)$ 的小波变换来重建 $f(t)$ 是小波应用的一个极其重要的问题. 对于连续小波、半离散的二进小波、离散的正交小波以及双正交小波的反演公式，前面都已经讨论了. 那么对于半正交小波，如何由

离散小波变换$\left\{W_f\left(\frac{1}{2^m},\frac{n}{2^m}\right),\ m,n\in\mathbf{Z}\right\}$实现 $f(t)$ 的重建呢?

设 $\psi(t)$ 是一个半正交小波，根据定理 5.16，必存在对偶小波 $\psi^*(t)$. 由于$\{\psi_{mn}^*(t),\ m,n\in\mathbf{Z}\}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 Riesz 基，所以 $\forall f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，必有唯一的表示式

$$f(t)=\sum_{m,n\in\mathbf{Z}}c_{mn}\psi_{mn}^*(t).$$

又根据对偶小波的双正交性质$\langle\psi_{mn},\psi_{jk}^*\rangle=\delta_{mj}\cdot\delta_{nk}$，所以

$$f(t)=\sum_{m,n\in\mathbf{Z}}W_f\left(\frac{1}{2^m},\frac{n}{2^m}\right)\psi_{mn}^*(t).$$

由此可见，将$L^2(\mathbf{R})$分解为相互正交的子空间W_m的正交和$L^2(\mathbf{R})=\bigoplus_{m\in\mathbf{Z}}W_m$是离散小波变换的核心.

从连续小波变换的反演到半离散的二进小波变换的反演，半离散的小波变换所短缺的信息，由稳定性条件

$$0<A\leqslant\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2\leqslant B<+\infty$$

加以弥补. 对于半正交的离散小波变换$\left\{W_f\left(\frac{1}{2^m},\frac{n}{2^m}\right),\ m,n\in\mathbf{Z}\right\}$包含的信息比半离散小波变换更少，要实现重建，满足的条件是

$$0<A\leqslant\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(\omega+2k\pi)|^2\leqslant B<+\infty.$$

定理5.17 *设 $\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})$，$A,B$ 为常数，如果*

$$0<A\leqslant\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(\omega+2k\pi)|^2\leqslant B<+\infty \tag{5.56}$$

成立，则必有

$$0<A\leqslant\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2\leqslant B<+\infty \tag{5.57}$$

成立.

证 见文献[34]. ∎

由此可见，由于离散小波变换$\left\{W_f\left(\frac{1}{2^m},\frac{n}{2^m}\right),\ m,n\in\mathbf{Z}\right\}$比半离散小波变换$\left\{W_f\left(\frac{1}{2^m},b\right),\ m\in\mathbf{Z},\ b\in\mathbf{R}\right\}$包含的信息更少，因此重建的条件当然也就更强.

当条件(5.56)成立时，$\psi(t)$的整数平移$\{\psi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$可以构成Riesz系. 特别当 $A=B=1$ 时，$\{\psi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$ 就成为标准正交系. 而由定理

5.17，这时必有 $\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2=1$. 因此 $\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(\omega+2k\pi)|^2=1$ 成立是 $\{\psi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$ 成为标准正交系的充分必要条件. 而 $\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2=1$ 成立只是必要条件.

这里特别要指出，二进小波不一定是R小波. 因此，在研究连续小波时，我们只要求 $\psi(t)$ 满足可允许性条件(2.1). 但是连续小波不一定就是二进小波，当然也不一定是R小波. 在研究半离散小波时，就希望 $\psi(t)$ 是二进小波. 当需要研究离散小波时，就希望 $\psi(t)$ 是R小波.

现在，如果把一个满足可允许性条件(2.1)的连续小波或者满足稳定性条件(5.1)的二进小波 $\psi(t)$ 直接离散化为

$$\psi_{mn}(t)=2^{\frac{m}{2}}\psi(2^mt-n),$$

那么 $\{\psi_{mn}(t),\ m,n\in\mathbf{Z}\}$ 将能起到什么作用呢? 我们留给读者思考.

5.4 小波框架

框架是Duffin和Schaeffer于1952年在研究非调和的Fourier级数时提出的，是标准正交基概念的推广. Daubechies等人于1986年将框架与小波结合起来并建立了小波框架的一系列理论. 这里，我们先在一般Hilbert空间中引入框架的概念并讨论有关性质，然后再讨论小波框架，最后给出一个小波框架的例子.

5.4.1 Hilbert空间中的框架

设 H 是一个Hilbert空间，$\{\varphi_k,\ k\in J\}$ 是 H 中的一族元素，这里 J 是指标集. 设 $f_1,f_2\in H$，当 f_1,f_2 很"接近"，即 $\|f_1-f_2\|$ 很小时，我们希望

$$\sum_{k\in J}|\langle f_1,\varphi_k\rangle-\langle f_2,\varphi_k\rangle|^2$$

也应很小，这只需要

$$\sum_{k\in J}|\langle f,\varphi_k\rangle|^2\leqslant B\|f\|^2,$$

这里 B 是一个常数; 反之，当 $\langle f_1,\varphi_k\rangle$ 与 $\langle f_2,\varphi_k\rangle$ 很接近时，$\|f_1-f_2\|$ 也应很小，这只需要

$$A\|f\|^2\leqslant\sum_{k\in J}|\langle f,\varphi_k\rangle|^2,$$

只有这样才能保证数值计算的稳定性. 因此，我们把

$$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{k\in J}|\langle f,\varphi_k\rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2$$

称为稳定性条件.

定义 5.9 设$\{\varphi_k, k\in J\}$是 Hilbert 空间 H 中的一族元素，如果存在常数 A,B $(0<A\leqslant B<+\infty)$，使 $\forall f\in H$，都有**稳定性条件**

$$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{k\in J}|\langle f,\varphi_k\rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2 \tag{5.58}$$

成立，则称$\{\varphi_k, k\in J\}$是 H 的一个**框架**. A,B 称为框架的上、下界. 若 $A=B$，则称$\{\varphi_k, k\in J\}$是一个**紧框架**.

对于紧框架，$\forall f\in H$，都有

$$A\|f\|^2 = \sum_{k\in J}|\langle f,\varphi_k\rangle|^2.$$

任取 $g\in H$，利用极化恒等式

$$\langle f,g\rangle = \frac{\|f+g\|^2-\|f-g\|^2}{4} - \frac{\|f+\mathrm{i}g\|^2-\|f-\mathrm{i}g\|^2}{4\mathrm{i}}$$

不难推出：

$$A\langle f,g\rangle = \sum_{k\in J}\langle f,\varphi_k\rangle\langle\varphi_k,g\rangle.$$

注意到 g 的任意性，于是有

$$f = \frac{1}{A}\sum_{k\in J}\langle f,\varphi_k\rangle\varphi_k. \tag{5.59}$$

这自然使我们想到把 f 用 H 的一个标准正交基表示出来，但遗憾的是，框架$\{\varphi_k, k\in J\}$不一定是基，更不用说是正交基.

例 5.4 设 $H=\mathbf{R}^3$，取 $\varphi_1=(1,-1,0)$，$\varphi_2=(0,1,-1)$，$\varphi_3=(-1,0,1)$，$\varphi_4=(1,1,1)$. 对于任意的 $f=(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$，有

$$\langle f,\varphi_1\rangle^2=(x-y)^2,\qquad \langle f,\varphi_2\rangle^2=(y-z)^2,$$
$$\langle f,\varphi_3\rangle^2=(-x+z)^2,\quad \langle f,\varphi_4\rangle^2=(x+y+z)^2,$$

因此有

$$\sum_{k=1}^{4}|\langle f,\varphi_k\rangle|^2 = 3\|f\|^2,$$

所以$\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4\}$是 $\mathbf{R}^3$ 的一个框架，而且是紧框架，其中 $A=B=3$.

我们看到，$\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4\}$显然是线性相关的，当然不构成 $\mathbf{R}^3$ 的基. 所以框架与基相比具有更宽松的条件.

例 5.5 设 $\psi(t)$ 是 Haar 小波，即

$$\psi(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<\frac{1}{2},\\ -1, & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

令 $\psi_{mn}(t)=2^{\frac{m}{2}}\psi\left(2^m t-\frac{n}{3}\right)$. 易知$\{\psi_{mn}(t)\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$的 3 个子序列

$$\{\psi_{m,3k+j}(t)\}_{m,k\in\mathbf{Z}},\quad j=0,1,2$$

都是 $L^2(\mathbf{R})$ 中的标准正交系，且$\{\psi_{m,3k}(t)\}_{m,k\in\mathbf{Z}}$还是 $L^2(\mathbf{R})$ 的标准正交基，故对任意的 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，利用 Bessel 不等式，有

$$\begin{aligned}\|f\|^2&=\sum_{m,k\in\mathbf{Z}}|\langle f,\psi_{m,3k}\rangle|^2\leqslant\sum_{m,n\in\mathbf{Z}}|\langle f,\psi_{mn}\rangle|^2\\&=\|f\|^2+\sum_{m,k\in\mathbf{Z}}|\langle f,\psi_{m,3k+1}\rangle|^2+\sum_{m,k\in\mathbf{Z}}|\langle f,\psi_{m,3k+2}\rangle|^2\\&\leqslant 3\|f\|^2,\end{aligned}$$

所以$\{\psi_{mn}(t)\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$是 $L^2(\mathbf{R})$ 中的一个线性相关的框架，框架界为 $A=1$, $B=3$.

定理5.18 设$\{\varphi_j, j\in J\}$是 Hilbert 空间 H 中的一族元素，则下列条件相互等价：

(1) $\{\varphi_j, j\in J\}$ 是 H 的一个 Riesz 基.

(2) $\{\varphi_j, j\in J\}$ 是 H 的一个框架，并且是一个 ω- 无关点列，即

$$\sum_{j\in J}c_j\varphi_j=0\Rightarrow c_j=0\quad(\forall j\in J).$$

证 设$\{\varphi_j, j\in J\}$是H的一个Riesz基，则存在正常数A,B，且$A\leqslant B$，使 $\forall\{c_j\}\in l^2$，都有

$$A\sum_{j\in J}|c_j|^2\leqslant\left\|\sum_{j\in J}c_j\varphi_j\right\|^2\leqslant B\sum_{j\in J}|c_j|^2.$$

令$\sum_{j\in J}c_j\varphi_j=0$，则$\sum_{j\in J}|c_j|^2=0$，所以$c_j=0\ (\forall j\in J)$. 故$\{\varphi_j, j\in J\}$是 H 中的一个 ω- 无关点列.

为了证明$\{\varphi_j, j\in J\}$是 H 的一个框架，考虑矩阵算子

$$\boldsymbol{M}=(a_{ij}),$$

其中 $a_{ij}=\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle$, $i,j\in J$. 由于 $\forall\{c_j\}\neq 0\in l^2$，有

$$\left\|\sum_{j\in J}c_j\varphi_j\right\|^2=\sum_{i,j\in J}c_i\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle\overline{c_j}>0,$$

所以M是正定的，因而是可逆的. 记$M^{-1}=(b_{ij})$是M的逆算子，则

$$\sum_{k\in J}a_{ik}b_{kj}=\delta_{ij},\quad i,j\in J.$$

于是，有

$$\frac{1}{B}\sum_{j\in J}|c_j|^2\leqslant\sum_{m,n\in J}c_m b_{mn}\overline{c_n}\leqslant\frac{1}{A}\sum_{j\in J}|c_j|^2.$$

若令

$$\varphi_i^*=\sum_{j\in J}b_{ij}\varphi_j,\quad i\in J,$$

则$\{\varphi_i^*,i\in J\}$是H中的一族元素，且

$$\langle\varphi_i^*,\varphi_j\rangle=\delta_{ij},\quad i,j\in J.$$

所以$\{\varphi_i^*,i\in J\}$是$\{\varphi_j,j\in J\}$的对偶基，满足

$$\langle\varphi_i^*,\varphi_j^*\rangle=b_{ij},\quad i,j\in J,$$

且

$$\frac{1}{B}\sum_{j\in J}|c_j|^2\leqslant\left\|\sum_{j\in J}c_j\varphi_j^*\right\|^2\leqslant\frac{1}{A}\sum_{j\in J}|c_j|^2.$$

因此，$\{\varphi_j^*,j\in J\}$是H的一个Riesz基. 故$\forall f\in H$，存在唯一的$\{c_j\}\in l^2$，使得

$$f=\sum_{j\in J}c_j\varphi_j^*=\sum_{j\in J}\langle f,\varphi_j\rangle\varphi_j^*,$$

且

$$\frac{1}{B}\sum_{j\in J}|\langle f,\varphi_j\rangle|^2\leqslant\|f\|^2\leqslant\frac{1}{A}\sum_{j\in J}|\langle f,\varphi_j\rangle|^2.$$

此即稳定性条件(5.58)式

$$A\|f\|^2\leqslant\sum_{j\in J}|\langle f,\varphi_j\rangle|^2\leqslant B\|f\|^2.$$

反之，若$\{\varphi_j,j\in J\}$是H中的一个ω-无关的框架，为简单起见就考虑$J=N$. 取l^2的标准正交基$\{\boldsymbol{e}_k,k\in\mathbf{N}\}$，其中$\boldsymbol{e}_k=\{\delta_{nk}\}_{n\in\mathbf{N}}$，定义算子

$$T:l^2\rightarrow H,\quad T(\boldsymbol{e}_k)=\sum_{n\in\mathbf{N}}\delta_{nk}\varphi_n=\varphi_k,$$

则T既是双射又是满射，因此T是可逆算子. 这就证得$\{\varphi_j,j\in\mathbf{N}\}$为$H$的一个Riesz基. ∎

定理5.19 Hilbert空间H中的点列$\{\varphi_k,k\in J\}$是标准正交基的充分必要条件是$\{\varphi_k,k\in J\}$构成H的一个紧框架，且$A=1$，$\|\varphi_k\|=1$，$k\in J$.

证 必要性显然，下面只证充分性.

因为$\{\varphi_k, k\in J\}$是H中的一个$A=1$的紧框架，故$\forall f\in H$，有

$$\|f\|^2=\sum_{k\in J}|\langle f,\varphi_k\rangle|^2.$$

特别取$f=\varphi_j$，则

$$\|\varphi_j\|^2=\sum_{k\in J}|\langle\varphi_j,\varphi_k\rangle|^2=\|\varphi_j\|^4+\sum_{k\neq j}|\langle\varphi_j,\varphi_k\rangle|^2.$$

因为$\|\varphi_j\|=1$，所以$\sum\limits_{k\neq j}|\langle\varphi_j,\varphi_k\rangle|^2=0$，故

$$\langle\varphi_j,\varphi_k\rangle=\delta_{jk},\quad \forall j,k\in J.$$

可见$\{\varphi_k, k\in J\}$是H的一个标准正交系. 又$\forall f\in H$，由(5.59)式，得

$$f=\sum_{k\in J}\langle f,\varphi_k\rangle\varphi_k,$$

因此，$\{\varphi_k, k\in J\}$是H的一个标准正交基. ∎

5.4.2 框架算子与对偶框架

现在，考虑当$\{\varphi_k, k\in J\}$是H的一般(非紧的)框架时，如何由序列$\{\langle f,\varphi_k\rangle\}_{k\in J}$重建$f$的问题. 为此，先引进框架算子的概念.

对于任一$f\in H$，因为稳定性条件(5.58)即

$$A\|f\|^2\leqslant\sum_{k\in J}|\langle f,\varphi_k\rangle|^2\leqslant B\|f\|^2$$

成立，所以$\{\langle f,\varphi_k\rangle\}_{k\in J}\in l^2$.

定义 5.10 设$\{\varphi_k, k\in J\}$是 Hilbert 空间H的一个框架，称线性算子

$$F: H\to l^2,\quad Ff=\{\langle f,\varphi_k\rangle\}_{k\in J},\ \forall f\in H$$

为框架$\{\varphi_k, k\in J\}$的**分析算子**，而称F的伴随算子

$$F^*: l^2\to H,\quad F^*c=\sum_{k\in J}c_k\varphi_k,\ \forall \mathbf{c}=\{c_k\}_{k\in J}\in l^2$$

为框架$\{\varphi_k, k\in J\}$的**综合算子**. 令$S=F^*F$，则

$$S: H\to H,\quad Sf=\sum_{k\in J}\langle f,\varphi_k\rangle\varphi_k,\ \forall f\in H. \tag{5.60}$$

我们称S为框架$\{\varphi_k, k\in J\}$的**框架算子**.

显然，若框架界为A,B $(0<A\leqslant B<+\infty)$，则$\forall f\in H$，都有

$$A\|f\|^2\leqslant\|Ff\|^2=\sum_{k\in J}|\langle f,\varphi_k\rangle|^2\leqslant B\|f\|^2,$$

所以F是有界算子，且

$$\sqrt{A}\leqslant\|F\|\leqslant\sqrt{B}.$$

对于框架算子S，根据(5.60)，易知

$$\langle Sf,f\rangle=\sum_{k\in J}|\langle f,\varphi_k\rangle|^2.$$

因此，稳定性条件(5.58)等价于

$$AI \leqslant S \leqslant BI, \tag{5.61}$$

其中 I 为 H 的恒同算子. 下面的定理说明，框架算子 S 还是可逆的.

定理5.20 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的一个正有界线性算子，且 T 的下界为 a，则 T 是可逆的，且其逆算子 T^{-1} 以 a^{-1} 为上界.

证 首先，证明 T 的像集 $\mathrm{Im}(T)=\{Tf\in H,\ \forall f\in H\}$ 是 H 的一个闭子空间，这等价于证明 $\mathrm{Im}(T)$ 中的任一 Cauchy 点列 $\{g_n\}$ 在 $\mathrm{Im}(T)$ 中必存在极限. 为此，设 $f_n\in H$，使得 $Tf_n=g_n$，由于

$$\begin{aligned} a\|f_n-f_m\|^2 &\leqslant \langle T(f_n-f_m),(f_n-f_m)\rangle \\ &\leqslant \|T(f_n-f_m)\|\|f_n-f_m\|, \end{aligned}$$

所以

$$\|f_n-f_m\| \leqslant a^{-1}\|g_n-g_m\| \to 0 \quad (n,m\to\infty),$$

故 $\{f_n\}$ 也是 H 中的一个 Cauchy 点列. 由 H 的完备性知，$\{f_n\}$ 在 H 中存在极限 f. 利用算子 T 的连续性可得

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} Tf_n = Tf \in \mathrm{Im}(T),$$

所以 $\mathrm{Im}(T)$ 为 H 的闭子空间.

其次，若 $\langle g,Tf\rangle=0$ 对一切 $f\in H$ 成立，则 $a\|g\|^2\leqslant\langle g,Tg\rangle=0$，从而 $g=0$，因此 $\mathrm{Im}(T)^{\perp}=\{0\}$，说明 $\mathrm{Im}(T)=H$，且 T 是可逆的.

此外，由于 $\forall f\in H$，有

$$\begin{aligned} a\|T^{-1}f\|^2 &\leqslant \langle TT^{-1}f,T^{-1}f\rangle = \langle f,T^{-1}f\rangle \\ &\leqslant \|f\|\ \|T^{-1}f\|, \end{aligned}$$

即 $\|T^{-1}f\|\leqslant a^{-1}\|f\|$，所以 $\|T^{-1}\|\leqslant a^{-1}$，$T^{-1}$ 以 a^{-1} 为上界. ∎

根据定理5.20可知，S 是可逆算子，$\|S^{-1}\|\leqslant A^{-1}$，并且由(5.61)式易知

$$B^{-1}I \leqslant S^{-1} \leqslant A^{-1}I. \tag{5.62}$$

定理5.21 设 $\{\varphi_k,\ k\in J\}$ 是 Hilbert 空间 H 的一个以 A,B 为框架界的框架，S 是相应的框架算子，令

$$\varphi_k^* = S^{-1}\varphi_k,\quad k\in J,$$

则 $\{\varphi_k^*,\ k\in J\}$ 是 H 的一个以 B^{-1},A^{-1} 为框架界的框架，即 $\forall f\in H$，有

$$B^{-1}\|f\|^2 \leqslant \sum_{k\in J}|\langle f,\varphi_k^*\rangle|^2 \leqslant A^{-1}\|f\|^2. \tag{5.63}$$

相应的分析算子 $\widetilde{F}: H \to l^2$，$\widetilde{F}f = \{\langle f, \varphi_k^* \rangle\}_{k\in J}$ 满足

$$\widetilde{F} = F(F^*F)^{-1}, \quad \widetilde{F}^*\widetilde{F} = (F^*F)^{-1}, \quad \widetilde{F}^*F = F^*\widetilde{F} = I,$$

且 $\widetilde{F}F^* = F\widetilde{F}^*$ 是由 l^2 到 $\mathrm{Im}(F) = \mathrm{Im}(\widetilde{F})$ 的正交投影算子.

证 首先，因为 $(F^*F)^* = F^*F$，$(F^*F)^{-1}$ 存在且有界，所以 $((F^*F)^{-1})^* = (F^*F)^{-1}$，因此

$$\langle f, \varphi_k^* \rangle = \langle f, (F^*F)^{-1}\varphi_k \rangle = \langle (F^*F)^{-1}f, \varphi_k \rangle,$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{k\in J} |\langle f, \varphi_k^* \rangle|^2 &= \sum_{k\in J} |\langle (F^*F)^{-1}f, \varphi_k \rangle|^2 = \| F(F^*F)^{-1}f \|^2 \\ &= \langle (F^*F)^{-1}f, F^*F(F^*F)^{-1}f \rangle \\ &= \langle (F^*F)^{-1}f, f \rangle. \end{aligned} \tag{5.64}$$

再由(5.62)式即知(5.63)式成立，故$\{\varphi_k^*, k \in J\}$ 是 H 的以 B^{-1}, A^{-1} 为框架界的框架. 同时，(5.64)式表明 $\widetilde{F}^*\widetilde{F} = (F^*F)^{-1}$.

其次，由于 $\forall f \in H$，有

$$(F(F^*F)^{-1}f)_k = \langle (F^*F)^{-1}f, \varphi_k \rangle = \langle f, \varphi_k^* \rangle = (\widetilde{F}f)_k,$$

所以 $\widetilde{F} = F(F^*F)^{-1}$，从而

$$\widetilde{F}^*F = [F(F^*F)^{-1}]^*F = (F^*F)^{-1}F^*F = I,$$

$$F^*\widetilde{F} = F^*F(F^*F)^{-1} = I.$$

最后，一方面由 $\widetilde{F} = F(F^*F)^{-1}$ 知 $\mathrm{Im}(\widetilde{F}) \subset \mathrm{Im}(F)$. 另一方面由 $F = \widetilde{F}(F^*F)$ 又得到 $\mathrm{Im}(F) \subset \mathrm{Im}(\widetilde{F})$，故 $\mathrm{Im}(\widetilde{F}) = \mathrm{Im}(F)$.

设 P 为 $\mathrm{Im}(F)$ 上的正交投影算子，下证 $\widetilde{F}F^* = P$，这等价于证明 $\widetilde{F}F^*(Ff) = Ff$ 以及当 $c \perp \mathrm{Im}(F)$ 时 $\widetilde{F}F^*c = 0$. 事实上，这两点都不难证明：

$$\widetilde{F}F^*(Ff) = F(F^*F)^{-1}F^*Ff = Ff,$$

且当 $c \perp \mathrm{Im}(F)$ 时，有

$$\langle F^*c, f \rangle = \langle c, Ff \rangle = 0, \ \forall f \in H \Rightarrow F^*c = 0 \Rightarrow \widetilde{F}F^*c = 0,$$

故所要证的结论成立. ∎

我们称$\{\varphi_k^*, k \in J\}$ 是$\{\varphi_k, k \in J\}$ 的**对偶框架**.

现在，根据 $\widetilde{F}^*F = F^*\widetilde{F} = I$ 即可知，$\forall f \in H$，有

$$f = \sum_{k\in J} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k^*, \tag{5.65}$$

或

$$f = \sum_{k\in J} \langle f, \varphi_k^* \rangle \varphi_k. \tag{5.66}$$

于是，我们得到了由$\langle f, \varphi_k \rangle$ 重建或表示 f 的有效数值算法，即对于框架

$\{\varphi_k, k \in J\}$，只需要先计算对偶框架 $\varphi_k^* = S^{-1}\varphi_k, k \in J$，再由(5.65)式计算 f 即可.

5.4.3 小波框架

现在我们考虑 $L^2(\mathbf{R})$ 中的小波框架的问题.

定义 5.11 设 $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 是一个小波母函数，且对于常数 $a_0 > 1$，$b_0 > 0$，函数系

$$\psi_{mn}(t) = a_0^{\frac{m}{2}} \psi(a_0^m t - nb_0), \quad m,n \in \mathbf{Z} \tag{5.67}$$

构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个框架，则称 $\{\psi_{mn}(t)\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的**小波框架**.

显然，一个 R 小波 $\psi(t)$ 可以生成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个框架. 那么除了 R 小波，还有什么样的小波可以生成小波框架呢?

定理 5.22（必要条件） 设 $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$，如果 $\{\psi_{mn}(t)\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的具有框架界 A,B 的框架，则必有

$$0 < A \leqslant \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\hat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2 \leqslant B < +\infty. \tag{5.68}$$

证 详见文献[34]定理 3.21 的证明. ▮

这就是说，一个函数 $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$，经伸缩和平移后得到的函数系 $\{\psi_{mn}(t)\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$ 能构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个框架的必要条件是 $\psi(t)$ 是一个二进小波，换句话说，并不是任何一个满足允许性条件的小波母函数 $\psi(t)$ 都能生成小波框架的.

定理 5.23（充分条件） 设 $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 是一个基本小波，$a_0 > 1$，且存在常数 C，$\varepsilon > 0$，使得

$$X = \inf_{1\leqslant|\omega|\leqslant a_0} \sum_{m\in\mathbf{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m\omega)|^2 > 0, \tag{5.69}$$

$$Y = \sup_{1\leqslant|\omega|\leqslant a_0} \sum_{m\in\mathbf{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m\omega)|^2 < +\infty, \tag{5.70}$$

以及

$$\beta(\xi) = \sup_{\omega\in\mathbf{R}} \sum_{m\in\mathbf{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m\omega)| \, |\hat{\psi}(a_0^m\omega + \xi)| \leqslant \frac{C}{(1+|\xi|)^{1+\varepsilon}}, \tag{5.71}$$

则必存在常数 $b^* > 0$，使对任一 $b_0 \in (0, b^*)$，由(5.67)式生成的函数系 $\{\psi_{mn}(t), m,n \in \mathbf{Z}\}$ 构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个小波框架，框架界为

$$A = \frac{2\pi}{b_0}X - \rho\left(\frac{2\pi}{b_0}\right), \quad B = \frac{2\pi}{b_0}Y + \rho\left(\frac{2\pi}{b_0}\right), \tag{5.72}$$

其中

$$\rho\left(\frac{2\pi}{b_0}\right)=\frac{2\pi}{b_0}\sum_{\substack{k\in\mathbf{Z}\\k\neq 0}}\left[\beta\left(\frac{2\pi}{b_0}k\right)\beta\left(-\frac{2\pi}{b_0}k\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5.73}$$

证 详见文献[49]定理 3.3.2 的证明. ∎

定理 5.24 设 $\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 是一个基本小波，$a_0>1$，且存在常数 $C>0$，$\alpha>0$，以及 $\gamma>\alpha+1$，使得

(1) $$\inf_{1\leqslant|\omega|\leqslant a_0}\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(a_0^m\omega)|^2>0 \tag{5.74}$$

(2) $$|\hat{\psi}(\omega)|\leqslant C|\omega|^{\alpha}(1+|\omega|)^{-\gamma},\ \forall\omega\in\mathbf{R} \tag{5.75}$$

则有定理 5.23 的结论成立.

证 只需验证定理 5.23 中条件(5.70)和(5.71)成立即可.

一方面，利用条件(5.75)可得

$$\begin{aligned}
Y&=\sup_{1\leqslant|\omega|\leqslant a_0}\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(a_0^m\omega)|^2\\
&\leqslant C^2\sup_{1\leqslant|\omega|\leqslant a_0}\sum_{m\in\mathbf{Z}}|a_0^m\omega|^{2\alpha}(1+|a_0^m\omega|)^{-2\gamma}\\
&=C^2\sup_{1\leqslant|\omega|\leqslant a_0}\left[\left(\sum_{m=-\infty}^{-1}+\sum_{m=0}^{+\infty}\right)|a_0^m\omega|^{2\alpha}(1+|a_0^m\omega|)^{-2\gamma}\right]\\
&\leqslant C^2\left[\sum_{m=-\infty}^{-1}(a_0^{m+1})^{2\alpha}+\sum_{m=0}^{+\infty}(a_0^{m+1})^{2\alpha}(1+a_0^m)^{-2\gamma}\right]\\
&\leqslant C^2a_0^{2\alpha}\left[\sum_{m=-\infty}^{-1}a_0^{2\alpha m}+\sum_{m=0}^{+\infty}a_0^{2(\alpha-\gamma)m}\right]\\
&<+\infty.
\end{aligned}$$

所以条件(5.70)成立. 另一方面，易知

$$\begin{aligned}
\beta(\xi)&=\sup_{1\leqslant|\omega|\leqslant a_0}\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(a_0^m\omega)||\hat{\psi}(a_0^m\omega+\xi)|\\
&\leqslant C^2\sup_{1\leqslant|\omega|\leqslant a_0}\left[\sum_{m=-\infty}^{-1}+\sum_{m=0}^{+\infty}|a_0^m\omega|^{\alpha}(1+|a_0^m\omega|)^{-\gamma}\right.\\
&\qquad\left.\cdot|a_0^m\omega+\xi|^{\alpha}(1+|a_0^m\omega+\xi|)^{-\gamma}\right]\\
&\leqslant C^2\sup_{1\leqslant|\omega|\leqslant a_0}\left\{a_0^{\alpha}\sum_{m=-\infty}^{-1}a_0^{m\alpha}(1+|a_0^m\omega+\xi|)^{-(\gamma-\alpha)}\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{m=0}^{+\infty}[(1+|a_0^m\omega|)(1+|a_0^m\omega+\xi|)]^{-(\gamma-\alpha)}\right\}
\end{aligned}$$

$$\triangleq S_1 + S_2.$$

先估计 S_1. 此时，由于 $0 < |a_0^m\omega| \leqslant 1$，故当 $|\xi| \geqslant 2$ 时，有

$$|a_0^m\omega + \xi| \geqslant |\xi| - 1 \geqslant \frac{1}{2}|\xi|,$$

从而

$$(1 + |a_0^m\omega + \xi|)^{-1} \leqslant \frac{2}{|\xi| + 2} \leqslant 3(1 + |\xi|)^{-1}.$$

当 $|\xi| < 2$ 时，有

$$(1 + |a_0^m\omega + \xi|)^{-1} \leqslant 1 \leqslant 3(1 + |\xi|)^{-1}.$$

另外，显然有

$$\sum_{m=-\infty}^{-1} a_0^{m\alpha} = \frac{1}{a_0^\alpha - 1} < +\infty.$$

因此，存在常数 $D_1 > 0$，使得

$$S_1 \leqslant D_1(1 + |\xi|)^{-(\gamma-\alpha)}.$$

下面再估计 S_2. 由于

$$\begin{aligned} 1 + |\xi| &\leqslant 1 + |a_0^m\omega| + |a_0^m\omega + \xi| \\ &\leqslant (1 + |a_0^m\omega|)(1 + |a_0^m\omega + \xi|), \end{aligned}$$

并且 $\forall \rho \in (0,1)$，有

$$\sup_{1 \leqslant |\omega| \leqslant a_0} \sum_{m=0}^{+\infty} (1 + |a_0^m\omega|)^{-\rho(\gamma-\alpha)} \leqslant \sum_{m=0}^{+\infty} a_0^{-m\rho(\gamma-\alpha)} < +\infty.$$

故存在常数 $D_2 > 0$，使得

$$\begin{aligned} S_2 &\leqslant C^2(1 + |\xi|)^{-(1-\rho)(\gamma-\alpha)} \sup_{1 \leqslant |\omega| \leqslant a_0} \sum_{m=0}^{+\infty} (1 + |a_0^m\omega|)^{-\rho(\gamma-\alpha)} \\ &\leqslant D_2(1 + |\xi|)^{-(1-\rho)(\gamma-\alpha)}. \end{aligned}$$

综上所述，$\forall \varepsilon > 0$，只要 $1 + \varepsilon < \gamma - \alpha$，就有

$$\beta(\xi) = O\left(\frac{1}{(1 + |\xi|)^{1+\varepsilon}}\right).$$

这就是说，定理 5.23 中的条件(5.71) 也成立.

因此条件(5.74) 和(5.75) 式蕴含着定理 5.23 的结论成立. ∎

现在设 $\{\psi_{mn}(t)\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个小波框架，我们感兴趣的是，对于任一 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$，能否由 $f(t)$ 的离散小波变换 $C_f(m,n) = \langle f, \psi_{mn} \rangle$，$m,n \in \mathbf{Z}$ 来重建 $f(t)$.

首先，如果 $\{\psi_{mn}(t)\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$ 还是一个紧框架，则由(5.59) 式，有

$$f(t) = \frac{1}{A} \sum_{m,n\in\mathbf{Z}} \langle f, \psi_{mn} \rangle \psi_{mn}(t).$$

值得注意的是，由于框架$\{\psi_{mn}(t)\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$不一定是$\omega$-无关的，即存在非零序列$\{d_{mn}\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$使$\sum\limits_{m,n\in\mathbf{Z}} d_{mn}\psi_{mn}(t)=0$. 这时又有表达式

$$f(t)=\frac{1}{A}\sum_{m,n\in\mathbf{Z}}(\langle f,\psi_{mn}\rangle+d_{mn})\psi_{mn}(t).$$

可见，$f(t)$ 的表示式不是唯一的.

如果$\{\psi_{mn}(t)\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$不仅是紧框架，而且$A=1$，$\|\psi_{mn}\|=1$，$\forall m,n\in\mathbf{Z}$，则根据定理5.19知，$\{\psi_{mn}(t)\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$可以构成$L^2(\mathbf{R})$的标准正交基，此时有唯一表示式

$$f(t)=\sum_{m,n\in\mathbf{Z}}\langle f,\psi_{mn}\rangle\psi_{mn}(t).$$

现在考虑非紧的小波框架$\{\psi_{mn}(t)\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$，$F$是相应的分析算子

$$F:\ Ff=\{\langle f,\psi_{mn}\rangle\}_{m,n\in\mathbf{Z}},\quad \forall f(t)\in L^2(\mathbf{R}),$$

而F^* 是相应的综合算子，$S=F^*F$是相应的框架算子，令

$$\psi_{mn}^*=S^{-1}\psi_{mn},\quad m,n\in\mathbf{Z}$$

根据定理5.21，$\{\psi_{mn}^*(t)\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$是$\{\psi_{mn}(t)\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$的对偶框架. 因此，对于任一$f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，则(5.65)与(5.66)式相应地改写为

$$f(t)=\sum_{m,n\in\mathbf{Z}}\langle f,\psi_{mn}\rangle\psi_{mn}^*(t)\tag{5.76}$$

和

$$f(t)=\sum_{m,n\in\mathbf{Z}}\langle f,\psi_{mn}^*\rangle\psi_{mn}(t).\tag{5.77}$$

因此，当$\{\psi_{mn}(t)\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$是小波框架时，要用离散小波变换$\langle f,\psi_{mn}\rangle$来重建原信号$f(t)$，需要知道$\{\psi_{mn}(t)\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$的对偶$\{\psi_{mn}^*(t)\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$.

对于非紧框架的情形，要求出其对偶框架常常是很困难的，但可以根据$\psi_{mn}^*(t)=S^{-1}\psi_{mn}(t)$来求得$\psi_{mn}^*(t)$的近似. 当$A,B$比较接近时，由(5.61)式说明$S$"逼近"$\frac{A+B}{2}I$，所以$S^{-1}$"逼近"$\frac{2}{A+B}I$. 可取一阶近似$\psi_{mn}^*(t)\approx\frac{2}{A+B}\psi_{mn}(t)$，这时

$$f(t)=\frac{2}{A+B}\sum_{m,n\in\mathbf{Z}}\langle f,\psi_{mn}\rangle\psi_{mn}(t)+E_f(t),$$

这里E_f是误差算子，可以证明

$$\|E_f\|\leqslant\frac{B-A}{B+A}\|f\|.\tag{5.78}$$

事实上，由(5.60)式易知

$$E_f(t) = f(t) - \frac{2}{A+B}\sum_{m,n\in\mathbf{Z}}\langle f,\psi_{mn}\rangle\psi_{mn}(t)$$

$$= f(t) - \frac{2}{A+B}Sf(t) = \left(I - \frac{2}{A+B}S\right)f(t),$$

即 $E_f = \left(I - \frac{2}{A+B}S\right)f$. 利用(5.61) 式，得

$$E_f \geqslant \left(I - \frac{2B}{A+B}I\right)f = \frac{A-B}{A+B}f,$$

$$E_f \leqslant \left(I - \frac{2A}{A+B}I\right)f = \frac{B-A}{A+B}f,$$

所以

$$\| E_f \| \leqslant \left\|\frac{B-A}{B+A}f\right\| = \frac{B-A}{B+A}\| f \|.$$

于是有

$$\| E_f \| \leqslant \frac{B-A}{B+A} = \frac{r}{r+2},$$

其中 $r = \frac{B}{A} - 1$. 这就是说，框架界 A,B 越接近，逼近效果越好. 因此框架的上、下界对计算有着很大的影响.

5.4.4 Marr 小波框架

作为小波框架的一个例子，我们来讨论由 Marr 小波(即 Mexican 帽子小波)

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-\frac{1}{4}}(1-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{5.79}$$

生成的小波框架. $\psi(t)$ 的图形如图 2-2 所示. 容易验证

(1) $\| \psi \|_2^2 = 1$;

(2) $\hat{\psi}(\omega) = 2\left(\frac{2}{3}\sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{2}}$; (5.80)

(3) $\| \hat{\psi} \|_2^2 = 2\pi$;

(4) $C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}d\omega = \frac{8}{3}\sqrt{\pi} \approx 4.726\,54.$ (5.81)

根据例 2.2 可知，$\psi(t)$ 是一个基本小波. 容易验证，定理 5.24 中的条件(5.74) 与(5.75) 成立，所以由 $\psi(t)$ 生成的函数系

$$\{\psi_{mn}(t) = a_0^{m/2}(a_0^m t - nb_0),\ m,n \in \mathbf{Z}\} \tag{5.82}$$

构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个小波框架.

在实际应用中，取 $a_0=2$ 是非常方便的，这时利用公式(5.72)和(5.73)计算小波框架的下界和上界如表 5-4 所示.

表 5-4　　Marr 小波框架下界和上界

b_0	A	B	$\frac{B}{A}$	b_0A	b_0B	$\frac{b_0}{2}(A+B)$	$\frac{b_0}{2}(B-A)$
0.25	13.091	14.183	1.083	3.273	3.546	3.410	0.137
0.50	6.546	7.092	1.083	3.273	3.546	3.410	0.137
0.75	4.364	4.728	1.083	3.273	3.546	3.410	0.137
1.00	3.223	3.596	1.116	3.223	3.596	3.410	0.187
1.25	2.001	3.454	1.726	2.501	4.318	3.410	0.909
1.50	0.325	4.221	12.986	0.488	6.312	3.410	2.922

由表 5-4 可以看出，当 b_0 较小时，$\frac{B}{A}\approx 1$，但还不是紧框架. 自然要问：当 b_0 取得更小时，是否能得到紧框架呢? 回答是否定的. 为此我们考虑函数：

$$S(\omega)=\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^m\omega)|^2=\frac{8}{3}\sqrt{\pi}\sum_{m\in\mathbf{Z}}2^{2m}\omega^2\mathrm{e}^{-2^{2m-1}\omega_2}.$$

根据定理 5.22，当 $S(\omega)$ 接近于某个常数时，小波框架(5.82)才有可能成为紧框架. 经过计算，知

$$\min_{\omega\in\mathbf{R}}S(\omega)=S(1)\approx 3.3729,$$

$$\max_{\omega\in\mathbf{R}}S(\omega)=S(\sqrt{2})\approx 3.4461.$$

可见，当 $a_0=2$ 时，无论 b_0 取值怎样小，$\{\psi_{mn}(t),\ m,n\in\mathbf{Z}\}$ 都不可能成为紧框架.

为了得到紧框架，一种做法是取 $a_0\leqslant 2^{\frac{1}{4}}$. 但这在应用中是不方便的. 另一种做法是由 Grossman, Kronland-Martinet 和 Morlet 提出的：保持 $a_0=2$ 不变，并考虑由 N 个小波函数 $\psi^1,\psi^2,\cdots,\psi^N$ 所生成的框架

$$\{\psi_{mn}^v(t)=2^{\frac{m}{2}}\psi^v(2^mt-nb_0),\ m,n\in\mathbf{Z},\ v=1,2,\cdots,N\}. \tag{5.83}$$

通过与定理 5.23 完全类似的推导可证明，该框架的下界和上界分别为

$$A=\frac{2\pi}{b_0}\left(\inf_{1\leqslant|\omega|\leqslant 2}\sum_{v=1}^{N}\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}^v(2^m\omega)|^2-R\left(\frac{2\pi}{b_0}\right)\right), \tag{5.84}$$

$$B=\frac{2\pi}{b_0}\left(\sup_{1\leqslant|\omega|\leqslant 2}\sum_{v=1}^{N}\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}^v(2^m\omega)|^2+R\left(\frac{2\pi}{b_0}\right)\right). \tag{5.85}$$

其中

$$R(t)=\sum_{v=1}^{N}\sum_{k\neq 0}[\beta^{v}(kt)\beta^{v}(-kt)]^{\frac{1}{2}},\tag{5.86}$$

$$\beta^{v}(\xi)=\sup_{1\leqslant|\omega|\leqslant 2}\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}^{v}(2^{m}\omega)||\hat{\psi}^{v}(2^{m}\omega+\xi)|.\tag{5.87}$$

这里的关键是适当选择 $\psi^1,\psi^2,\cdots,\psi^N$ 使函数

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}^{v}(2^{m}\omega)|^{2},\quad v=1,2,\cdots,N$$

的峰值点错开，从而使函数

$$S_N(\omega)=\sum_{v=1}^{N}\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}^{v}(2^{m}\omega)|^{2}\tag{5.88}$$

近似于常函数，能够保证对于小的 b_0 而言，$\frac{B}{A}$ 非常接近 1.

具体说来，对于 Mexican 帽子小波 $\psi(t)$，可取

$$\psi^{v}(t)=2^{\frac{v-1}{N}}\psi(2^{\frac{v-1}{N}}t),\quad v=1,2,\cdots,N.\tag{5.89}$$

这时，当 N 充分大时，$S_N(\omega)$ 接近于常数. 具体证明如下：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N}\sup_{1\leqslant\omega\leqslant 2^{1/N}}S_N(\omega)\\
&=\frac{1}{N}\sup_{1\leqslant\omega\leqslant 2^{1/N}}\sum_{v=1}^{N}\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^{-m}2^{-\frac{v-1}{N}}\omega)|^{2}\\
&=\frac{1}{N}\sup_{2^{-1/N}\leqslant\omega\leqslant 1}\sum_{v=1}^{N}\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^{-m}2^{-\frac{v-1}{N}}\omega)|^{2}\\
&=\sum_{m\in\mathbf{Z}}\frac{1}{N}\sum_{v=1}^{N}|\hat{\psi}(2^{-m}2^{-\frac{v-1}{N}}\omega_0)|^{2}\\
&\to\sum_{m\in\mathbf{Z}}\int_0^1|\hat{\psi}(2^{-m}2^{-t})|^{2}\mathrm{d}t=\sum_{m\in\mathbf{Z}}\int_m^{m+1}|\hat{\psi}(2^{-t})|^{2}\mathrm{d}t\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{\psi}(2^{-t})|^{2}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^{2}}{\ln 2\omega}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{C_\psi}{2\ln 2}.
\end{aligned}$$

同理可证：当 $N\to+\infty$ 时

$$\frac{1}{N}\inf_{1\leqslant\omega\leqslant 2^{1/N}}\sum_{v=1}^{N}\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^{-m}2^{-\frac{v-1}{N}}\omega)|^{2}\to\frac{C_\psi}{2\ln 2}.$$

故当 $N\to+\infty$ 时，有

$$\frac{\sup\limits_{1\leqslant\omega\leqslant 2^{1/N}} S_N(\omega)}{\inf\limits_{1\leqslant\omega\leqslant 2^{1/N}} S_N(\omega)} = \frac{\frac{1}{N}\sup\limits_{1\leqslant\omega\leqslant 2^{1/N}}\sum\limits_{v=1}^{N}\sum\limits_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}^v(2^m\omega)|^2}{\frac{1}{N}\inf\limits_{1\leqslant\omega\leqslant 2^{1/N}}\sum\limits_{v=1}^{N}\sum\limits_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}^v(2^m\omega)|^2} \to 1.$$

特别，分别取 $N=2$ 和 $N=4$，利用(5.84)，(5.85)式计算出小波框架界如表 5-5 和表 5-6 所示.

表 5-5　　$N=2$ 时小波框架界

b_0	A	B	$\frac{B}{A}$
0.25	27.273	27.278	1.0002
0.50	13.637	13.639	1.0002
0.75	9.091	9.093	1.0002
1.00	6.768	6.870	1.015
1.25	4.834	6.077	1.257
1.50	2.609	6.483	2.485
1.75	0.517	7.276	14.061

表 5-6　　$N=4$ 时小波框架界

b_0	A	B	$\frac{B}{A}$
0.25	54.552	54.552	1.000
0.50	27.276	27.276	1.000
0.75	18.184	18.184	1.000
1.00	13.586	13.690	1.007
1.25	10.205	11.616	1.138
1.50	6.594	11.590	1.758
1.75	2.928	12.659	4.324

由表 5-6 可见，当 $a_0=2$，$N=4$ 时，对于 $b_0=0.25, 0.5, 0.75$ 这 3 种情形，小波框架(5.83)都近似于紧框架.

习 题 5

1. 什么是双正交小波和对偶双尺度符号？二者的关系如何？

2. 设 $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 是一个二进小波，$\hat{\psi}(\omega)$ 是 $\psi(t)$ 的 Fourier 变换，证明：

$$\hat{\psi}^*(\omega) = \frac{\hat{\psi}(\omega)}{\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\hat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2}$$

的 Fourier 逆变换 $\psi^*(t)$ 也是一个二进小波.

3. 设 $\varphi(t),\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 的频域形式的双尺度方程为

$$\hat{\varphi}(2\omega) = H(\omega)\hat{\varphi}(\omega),$$
$$\hat{\psi}(2\omega) = G(\omega)\hat{\varphi}(\omega).$$

证明：如果存在 $A > 0$ 和 $B > 0$ 使得

$$A(2 - |H(\omega)|^2) \leqslant |G(\omega)|^2 \leqslant B(2 - |H(\omega)|^2),$$

那么 $\psi(t)$ 是一个二进小波.

4. 设 $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 是一个二进小波，证明：对于任一 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 的二进小波变换 $W_f(2^j,b)$，都有

$$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{1}{2^j}\|W_f(2^j,b)\|^2 \leqslant B\|f\|^2,$$

其中 A,B 为稳定性条件(5.1)中的常数.

5. 设 $l^2(L^2(\mathbf{R}))$ 是满足条件 $\sum_{j\in\mathbf{Z}}\|g_j\|^2 < +\infty$ 的序列 $\{g_j(t)\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 构成的空间. 证明：如果 $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 是一个二进小波，$W_f(2^j,b)$ 是 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 的二进小波变换，那么 $\{W_f(2^j,b)\}_{j\in\mathbf{Z}} \in l^2(L^2(\mathbf{R}))$.

6. 设 $\varphi(t)$ 与 $\varphi^*(t)$ 是一对相互对偶的尺度函数，$\{h_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 与 $\{h_n^*\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 是对应的双尺度序列. 令

$$P(z) = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}} h_n z^n,\quad Q(z) = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}} h_n^* z^n.$$

证明：下列两个命题相互等价：

(1) $\forall k \in \mathbf{Z}$，有 $\sum_{n\in\mathbf{Z}} h_n \bar{h}_{n-2k}^* = 2\delta_{0k}$.

(2) 当 $|z| = 1$ 时，有 $P(z)\overline{Q(z)} + P(-z)\overline{Q(-z)} = 1$.

7. 证明 Riesz 条件的时域式(5.53)与频域式(5.54)的等价性.

8. 设 $N_m(t)$ 是 m 阶 B-样条，证明：$\{N_m(t-k),\ k\in\mathbf{Z}\}$ 是一个 Riesz 系.

9. 证明：$\frac{1}{3} \leqslant \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\hat{N}_2(\omega + 2k\pi)|^2 \leqslant 1$.

10. 求证：如果 $\{\psi_{nk}(t),\ n,k \in \mathbf{Z}\}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 中的一个标准正交基，那么 $\forall\omega \in \mathbf{R}$，有 $\sum_{j\in\mathbf{Z}} |\hat{\psi}(2^j\omega)|^2 = 1$. 请举例说明其逆命题不真.

11. 设对偶滤波器$\{h_n\}$与$\{h_n^*\}$的长度都为偶数，计算$N=1$，$N^*=1$情形下的$\{h_n\}$和$\{h_n^*\}$.

12. 证明：Hilbert 空间$\mathbf{C}^2$中的向量$(1,0)$，$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$构成一个紧框架但不是$\mathbf{C}^2$的标准正交基.

13. 设$\psi(t)$为 Marr 小波，即$\psi(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-\frac{1}{4}}(1-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}$，证明：

(1) $\|\psi\|_2=1$；

(2) $\hat{\psi}(\omega)=2\left(\frac{2}{3}\sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{2}}$；

(3) $\|\hat{\psi}\|_2^2=2\pi$；

(4) $C_\psi=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}d\omega=\frac{8}{3}\sqrt{\pi}$.

14. 设$g_{nk}(t)=g(t-nu_0)e^{ik\xi_0 t}$，其中$g(t)$是支集含于$\left[-\frac{\pi}{\xi_0},\frac{\pi}{\xi_0}\right]$的窗口函数，证明：

(1) $|g(t-nu_0)|^2 f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\langle f,g_{nk}\rangle g_{nk}(t)$；

(2) 若$\frac{2\pi}{\xi_0}\sum_{n\in\mathbf{Z}}|g(t-nu_0)|^2=A$，$\forall t\in\mathbf{R}$，则$\{g_{nk}(t),\ n,k\in\mathbf{Z}\}$是$L^2(\mathbf{R})$中的一个框架界等于$A$的紧框架.

第六章　小波逼近与算法

迄今，我们已经阐述了小波分析的基本理论，所研究的主要对象是连续依赖于时间变量的函数或信号. 但在实际应用中，我们面对的往往是一组离散形式的数据，怎样把实际数据与小波理论联系起来，怎样在计算机上开展工作，这正是本章的主要目的. 本章主要介绍信号的多尺度逼近、分解与重构，Mallat 快速算法，双正交小波，提升格式，整数小波变换，正交小波包等.

6.1　信号的逼近、分解与重构

6.1.1　信号的多尺度逼近

设$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 OMRA，$\varphi(t)$ 是相应的尺度函数. 对于 $L^2(\mathbf{R})$ 中的任一函数 $f(t)$，或称模拟信号，都可用一个不同尺度的函数序列$\{f_j(t)\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 来逼近，其中 $f_j(t)\in V_j$ 称为 $f(t)$ 在第 j 个尺度空间 V_j 中的近似分量，而称序列$\{f_j(t)\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 为函数 $f(t)$ 的一个多尺度逼近. 工程实践中通过采样获取数字信号就是一个逼近过程. 具体地说，考虑一个支撑区间为$[a,b]$的函数 $f(t)$，给定等距采样间隔Δ作为基本单位，对应于 j 尺度的采样间隔为$\frac{\Delta}{2^j}$，$j\in\mathbf{Z}$，采样点记为 $t_k^j=a+(k+1)\frac{\Delta}{2^j}$ $(k\in\mathbf{Z})$，相应的采样值记为 $c_{j,k}=f(t_k^j)$，称为逼近系数. 如果$\{\varphi_{jk}(t),\ k\in\mathbf{Z}\}$ 是 V_j 的一个基，那么

$$f_j(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{j,k}\varphi_{jk}(t)\in V_j$$

就是 $f(t)$ 在 V_j 中的一个近似，其中 $\varphi_{jk}(t)$ 可取尺度函数 $\varphi(t)$ 的二进伸缩与整数平移，即

$$\varphi_{jk}(t)=2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^jt-k),\quad j,k\in\mathbf{Z}.$$

此时，由于$\{\varphi_{jk}(t),\ k\in\mathbf{Z}\}$ 是 V_j 的一个标准正交基，所以采样值 $c_{j,k}$，基函

数 $\varphi_{jk}(t)$ 与逼近信号 $f_j(t)$ 之间满足关系式

$$c_{j,k}=\langle f_j(t),\varphi_{jk}(t)\rangle,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

6.1.2 Haar 小波分解算法

现在，我们以 Haar 小波为例，简要地介绍信号的小波分解与重构过程，以便对信号的分解与重构有一个比较直观的理解和认识.

设 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 分别是 Haar 尺度函数与小波函数，则尺度空间 V_j 和小波子空间 W_j 分别由

$$\{2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^jt-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}\quad 与\quad \{2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jt-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$$

生成. 为简单起见，考虑一个支撑区间为[0,1] 的信号 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，经过采样(采样间隔为$\frac{1}{4}$)，得到采样值为 $-1,4,2,-3$. 这等同于由 $f(t)$ 得到了一个阶梯函数：

$$f_2(t)=\begin{cases}-1, & 0\leqslant t<\frac{1}{4},\\ 4, & \frac{1}{4}\leqslant t<\frac{1}{2},\\ 2, & \frac{1}{2}\leqslant t<\frac{3}{4},\\ -3, & \frac{3}{4}\leqslant t<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

即 $f(t)$ 在尺度空间 V_2 中的一个逼近. 因为 Haar 尺度函数为

$$\varphi(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

所以，$f_2(t)$ 可用 V_2 中的基表示为

$$f_2(t)=-\varphi(4t)+4\varphi(4t-1)+2\varphi(4t-2)-3\varphi(4t-3).$$

我们知道，Haar 小波的双尺度方程为

$$\begin{cases}\varphi(t)=\varphi(2t)+\varphi(2t-1),\\ \psi(t)=\varphi(2t)-\varphi(2t-1),\end{cases}\tag{6.1}$$

所以有

$$\begin{cases}\varphi(2t)=\frac{1}{2}(\varphi(t)+\psi(t)),\\ \varphi(2t-1)=\frac{1}{2}(\varphi(t)-\psi(t)).\end{cases}\tag{6.2}$$

于是，$\forall j,k\in\mathbf{Z}$，有

$$\begin{cases}\varphi(2^{j+1}t-2k)=\dfrac{1}{2}\big(\varphi(2^jt-k)+\psi(2^jt-k)\big),\\ \varphi(2^{j+1}t-2k-1)=\dfrac{1}{2}\big(\varphi(2^jt-k)-\psi(2^jt-k)\big).\end{cases}\tag{6.3}$$

由此取 $j=1$ 和 $k=0,1$，代入 $f_2(t)$ 的展开式，得

$$f_2(t)=\frac{3}{2}\varphi(2t)-\frac{1}{2}\varphi(2t-1)-\frac{5}{2}\psi(2t)+\frac{5}{2}\psi(2t-1).$$

其中前 2 项

$$f_1(t)=\frac{3}{2}\varphi(2t)-\frac{1}{2}\varphi(2t-1)\in V_1$$

是 $f(t)$ 在 V_1 中的近似分量，而第 3,4 项

$$w_1(t)=-\frac{5}{2}\psi(2t)+\frac{5}{2}\psi(2t-1)\in W_1\tag{6.4}$$

则是 $f(t)$ 在 W_1 中的小波分量. 于是，有

$$f_2(t)=f_1(t)+w_1(t).$$

由于 $f_1(t)$ 代表了 $f_2(t)$ 的主要部分，所以 $w_1(t)$ 反映了用 $f_1(t)$ 逼近 $f_2(t)$ 时所产生的误差，因此小波分量 $w_1(t)$ 又称为细节分量.

进一步，$f_1(t)$ 还可分解为

$$f_1(t)=\frac{1}{2}\varphi(t)+\psi(t),$$

其中的第 1 项

$$f_0(t)=\frac{1}{2}\varphi(t)\tag{6.5}$$

是 $f(t)$ 在 V_0 中的近似分量，第 2 项

$$w_0(t)=\psi(t)\tag{6.6}$$

是 $f(t)$ 在 W_0 中的小波分量.

综合上述，最后的分解结果为

$$f_2(t)=f_0(t)+w_0(t)+w_1(t),$$

其中 $f_0(t),w_0(t),w_1(t)$ 分别如(6.5),(6.6),(6.4) 式所示.

一般地，设 $f_{j+1}(t)$ 是信号 $f(t)$ 在子空间 V_{j+1} 中的逼近，即

$$f_{j+1}(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{j+1,k}\varphi(2^{j+1}t-k),\tag{6.7}$$

将上式右端先分解为偶部与奇部，再用(6.3) 式代入，得

$$f_{j+1}(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{j+1,2k}\varphi(2^{j+1}t-2k)+\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{j+1,2k+1}\varphi(2^{j+1}t-2k-1)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}(c_{j+1,2k}+c_{j+1,2k+1})\varphi(2^j t-k)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}(c_{j+1,2k}-c_{j+1,2k+1})\psi(2^j t-k)$$
$$= f_j(t)+w_j(t), \tag{6.8}$$

其中 $f_j(t)$ 与 $w_j(t)$ 分别为 $f_{j+1}(t)$ 在 V_j 与 W_j 中的分量. 注意到

$$\begin{cases} f_j(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{j,k}\varphi(2^j t-k), \\ w_j(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_{j,k}\psi(2^j t-k), \end{cases} \tag{6.9}$$

其中，$d_{j,k}$ 称为小波系数或细节系数. 比较(6.8) 与(6.9) 式，得

$$\begin{cases} c_{j,k}=\frac{1}{2}(c_{j+1,2k}+c_{j+1,2k+1}), \\ d_{j,k}=\frac{1}{2}(c_{j+1,2k}-c_{j+1,2k+1}). \end{cases} \tag{6.10}$$

如果用 $j-1$ 替代上述分解过程中的 j，则又可把 $f_j(t)$ 分解为

$$f_j(t)=f_{j-1}(t)+w_{j-1}(t).$$

如此继续下去，就可得到

$$f_{j+1}(t)=f_0(t)+w_0(t)+w_1(t)+\cdots+w_j(t), \tag{6.11}$$

其中 $f_0(t)$ 是 $f_{j+1}(t)$ 在 V_0 中的逼近分量，而 $w_m(t)$ 是 $f_{j+1}(t)$ 在 W_m 中的小波分量，$m=0,1,2,\cdots,j$.

6.1.3 Haar 小波重构算法

在完成重构之前，我们必须明确上述分解的目的是什么，分解结果有何用处. 例如，若是为了去除信号的噪声，则相当于噪声的分量 $w_j(t)$ 可以被舍弃，余下来的信号就不至于有太大的噪声. 又如，若是为了数据压缩，则舍弃那些幅值较小的分量 $w_j(t)$ 而不会对原来的信号有太大的影响，从而可以获得较大的压缩比.

不论以上哪种情况，本质上都是修改分解结果中的小波系数 $d_{j,k}$. 为简单起见，修改后的 $d_{j,k}$ 仍记为 $d_{j,k}$，由此可依次重构各个分量

$$f_{m+1}(t)=f_m(t)+w_m(t), \quad m=0,1,2,\cdots,j,$$

于是，可得到重构信号为

$$f_{j+1}(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{j+1,k}\varphi(2^{j+1}t-k).$$

根据(6.10) 式，这里的系数 $c_{j+1,k}$ 可由计算公式

$$\begin{cases} c_{m+1,2k}=c_{m,k}+d_{m,k}, \\ c_{m+1,2k+1}=c_{m,k}-d_{m,k}, \end{cases} \tag{6.12}$$

依次取 $m=0,1,2,\cdots,j$ 迭代得到.

6.1.4 小波信号处理的主要步骤

一般说来，小波应用于信号处理的过程基本上遵循上述几个步骤，只是需要另外适当选定小波，并利用下一节介绍的Mallat算法. 现在，设$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$是$L^2(\mathbf{R})$的一个OMRA，$\varphi(t)$与$\psi(t)$是相应的尺度函数与小波，那么对信号$f(t)\in L^2(\mathbf{R})$的处理过程可大致分为4个主要步骤.

第1步：取样. 这一步又称为预处理，需要选择适当的尺度J（称为顶级尺度），使得逼近子空间V_J能最佳地反映$f(t)$的各种信息. 这只需使2^J大于信号的Nyquist取样率即可(例如，人耳听力的最大极限频率20 kHz的2倍就是语音信号的**Nyquist取样率**，即40 kHz. 详见文献[21]). 具体地，设取样率为2^J，令取样值

$$c_{J,k}=f\left(\frac{k}{2^J}\right),$$

则有$f(t)$的最优近似或逼近(也称取样信号)

$$f_J(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{J,k}\varphi(2^Jt-k)\in V_J.$$

实际上，k的取值范围是有限的，由信号$f(t)$的持续时间即支集$\operatorname{supp}f(t)$决定. 例如，若$\operatorname{supp}f(t)=[0,1]$，则$0\leqslant k\leqslant 2^J-1$.

如果信号已离散化，那么这一步就不需要了.

第2步：分解. 利用Mallat分解算法把$f_J(t)$分解为

$$f_J(t)=w_{J-1}(t)+w_{J-2}(t)+\cdots+w_{J_0}(t)+f_{J_0}(t),$$

其中逼近分量$f_j(t)$与小波分量$w_j(t)$满足$f_{j+1}(t)=f_j(t)+w_j(t)$，且

$$\begin{cases}f_j(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{j,k}\varphi(2^jt-k),\\ w_j(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_{j,k}\psi(2^jt-k),\end{cases}$$

而逼近系数$c_{j,k}$与小波系数$d_{j,k}$是根据顶级的$c_{J,k}$并利用下一节的公式(6.17)依次取$j=J-1,J-2,\cdots$迭代得到，直到分解达到了满足要求的尺度水平$j=J_0$或者不可再分解了为止.

第3步：处理. 经过分解后，信号具有如下形式：

$$f_J(t)=\sum_{j=J_0}^{J-1}\Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_{j,k}\psi(2^jt-k)\Big)+\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{J_0,k}\varphi(2^{J_0}t-k).$$

现在，通过修改其中的小波系数$d_{j,k}$达到信号处理的目的. 例如，若是为了滤除信号的高频信息，则把所有绝对值大于某个阈值的$d_{j,k}$置为0，这很可

能仅仅滤除了与某些 k 对应的信号成分. 又如，若是为了数据压缩，则把所有绝对值小于某个阈值的 $d_{j,k}$ 置为 0. 无论什么目的，处理的本质就是修改系数 $d_{j,k}$.

第 4 步：重构. 现在的目标就是获得修改后的信号 $f_J(t)$，即

$$f_J(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{J,k}\varphi(2^Jt-k),$$

其中，系数 $c_{J,k}$ 是利用 Mallat 重构算法(6.18) 依次取 $j=J_0,J_0+1,\cdots,J-1$ 迭代得到. 值得注意的是，(6.18) 式中的 $d_{j,k}$ 是第 3 步修改过的小波系数，所以这里的 $c_{J,k}$ 与原来的 $c_{J,k}$ 当然是不同的. 但从理论上说，二者应近似相等.

必须指出，这里的第 3 步正是小波应用的关键，需要理论联系实际，具体问题具体对待. 至于如何选取阈值，如何评价重构信号的优劣等问题，我们将在第 8 章进行深入讨论.

6.2 Mallat 算法

1989 年，Mallat 在小波变换多分辨率分析理论与图像处理的应用研究中受到 Burt 与 Adelson 塔式算法的启发，提出了信号的塔式多分辨率分解与重构算法，这就是著名的 Mallat 算法. 一般认为，Mallat 算法在小波分析中的地位，类似于快速 Fourier 变换(FFT) 在经典 Fourier 分析中的地位.

设 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 OMRA，$\varphi(t)$ 是相应的生成元，相应的双尺度方程为

$$\varphi(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\varphi(2t-k),\quad \varphi(t)\in V_0,$$

$$\psi(t)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}g_k\varphi(2t-k),\quad \psi(t)\in W_0,$$

其中 $g_k=(-1)^k\bar{h}_{1-k}$. 再令

$$\varphi_{jk}(t)=2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^jt-k),\quad \psi_{jk}(t)=2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jt-k),$$

而 V_j 和 W_j 分别由 $\{\varphi_{jk}(t),k\in\mathbf{Z}\}$ 与 $\{\psi_{jk}(t),k\in\mathbf{Z}\}$ 生成，即

$$V_j=\overline{\text{span}}\{\varphi_{jk}(t),k\in\mathbf{Z}\},$$

$$W_j=\overline{\text{span}}\{\psi_{jk}(t),k\in\mathbf{Z}\}.$$

6.2.1 分解算法

设 $f_j(t)$ 与 $w_j(t)$ 分别是 $f(t)$ 在 V_j 与 W_j 中的逼近与细节，即

$$f_j(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_{j,k}\varphi_{jk}(t), \quad f_j(t) \in V_j.$$

$$w_j(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} d_{j,k}\psi_{jk}(t), \quad w_j(t) \in W_j.$$

分解算法要实现的目标是：利用$\{c_{j+1,k}\}$，$\{h_k\}$，$\{g_k\}$，计算逼近系数$\{c_{j,k}\}$ 和细节系数$\{d_{j,k}\}$.

因为$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$，$V_j \perp W_j$，所以

$$\begin{aligned} c_{j,k} &= \langle f_j, \varphi_{jk}\rangle = \langle f_j + w_j, \varphi_{jk}\rangle = \langle f_{j+1}, \varphi_{jk}\rangle \\ &= \sum_{p\in\mathbf{Z}} c_{j+1,p}\langle \varphi_{j+1,p}, \varphi_{jk}\rangle. \end{aligned} \tag{6.13}$$

而

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{j+1,p}, \varphi_{jk}\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{j+1,p}(t)\,\overline{\varphi_{jk}(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= 2^{j+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(2^{j+1}t - p)\,\overline{\varphi(2^j t - k)}\,\mathrm{d}t \\ &\xlongequal{x = 2^j t - k} 2^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(2x + 2k - p)\,\overline{\varphi(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= 2^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(2x + 2k - p)\sum_{n\in\mathbf{Z}} \overline{h_n\varphi(2x - n)}\,\mathrm{d}x \\ &= 2^{\frac{1}{2}}\sum_{n\in\mathbf{Z}} \overline{h_n}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(2x + 2k - p)\,\overline{\varphi(2x - n)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{h_{p-2k}}. \quad (\text{利用 } \varphi_{1n}(t) \text{ 的正交性}) \end{aligned}$$

代入(6.13)式，得

$$c_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}} c_{j+1,p}\,\overline{h_{p-2k}}. \tag{6.14}$$

同理，得

$$d_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}} c_{j+1,p}\,\overline{g_{p-2k}}. \tag{6.15}$$

(6.14)与(6.15)式合在一起即 **Mallat 分解算法**.

记$C^j = \{c_{j,k}\}$，$D^j = \{d_{j,k}\}$，引进算子：

$$H: l^2 \to l^2; \quad G: l^2 \to l^2.$$

其运算意义分别由(6.14)式和(6.15)式确定，即

$$(HC^{j+1})_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}} c_{j+1,p}\,\overline{h_{p-2k}},$$

$$(GC^{j+1})_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}} c_{j+1,p}\,\overline{g_{p-2k}}.$$

其结构示意图如图 6-1 所示. 由此可见

$$\begin{cases}C^N = H^{J-N}C^J, \\ D^N = GH^{J-N-1}C^J.\end{cases}$$

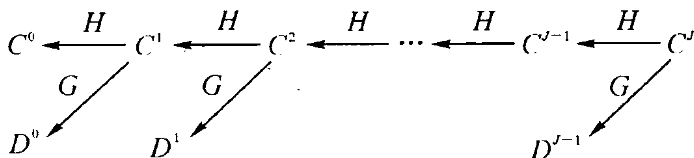


图 6-1　分解算法结构示意图

6.2.2　重构算法

重构算法是分解算法的逆过程，此时要实现的目标是：利用$\{c_{j,k}\}$，$\{d_{j,k}\}$，$\{h_k\}$ 和$\{g_k\}$ 来计算逼近系数$\{c_{j+1,k}\}$，其中 $d_{j,k}$ 是经过修改后的小波系数.

根据$\{\varphi_{j+1,k}(t),\ k\in\mathbf{Z}\}$ 的正交性，得

$$\begin{aligned}c_{j+1,k} &= \langle f_{j+1},\varphi_{j+1,k}\rangle \\ &= \langle f_j,\varphi_{j+1,k}\rangle + \langle w_j,\varphi_{j+1,k}\rangle \\ &= \sum_{p\in\mathbf{Z}} c_{j,p}\langle \varphi_{jp},\varphi_{j+1,k}\rangle + \sum_{p\in\mathbf{Z}} d_{j,p}\langle \psi_{jp},\varphi_{j+1,k}\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}} c_{j,p}\langle \sum_{m\in\mathbf{Z}} h_{m-2p}\varphi_{j+1,m},\varphi_{j+1,k}\rangle \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}} d_{j,p}\langle \sum_{m\in\mathbf{Z}} g_{m-2p}\varphi_{j+1,m},\varphi_{j+1,k}\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}} c_{j,p}h_{k-2p} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}} d_{j,p}g_{k-2p}.\end{aligned}$$

这就是 **Mallat 重构算法**. 为了便于计算，可写成如下公式：

$$\begin{cases}\tilde{c}_{j+1,k} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\sum_{p\in\mathbf{Z}} c_{j,(k-p)/2}h_p, \\ \tilde{d}_{j+1,k} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\sum_{p\in\mathbf{Z}} d_{j,(k-p)/2}g_p, \\ c_{j+1,k} = \tilde{c}_{j+1,k} + \tilde{d}_{j+1,k}.\end{cases} \tag{6.16}$$

为了更清楚地表明由$\{c_{j,k}\}$ 和$\{d_{j,k}\}$ $(0\leqslant j\leqslant J-1)$ 重构$\{c_{j,k}\}$ 的关系，采用算子的记号 $H^*: l^2\to l^2$，其运算意义为

$$(H^*C^j)_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}} c^j_{(k-p)/2}h_p,$$

其中，$C^j = \{c_{j,k}\}$；记 $G^*: l^2 \to l^2$，其运算意义为

$$(G^* D^j)_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p \in \mathbf{Z}} d^j_{(k-p)/2} g_p,$$

其中，$D^j = \{d_{j,k}\}$. 在这些重构算子意义下，式(6.16) 可表示为

$$\begin{cases} \widetilde{C}^{j+1} = H^* C^j, \\ \widetilde{D}^{j+1} = G^* D^j, \\ C^{j+1} = \widetilde{C}^{j+1} + \widetilde{D}^{j+1}, \end{cases}$$

于是从 $j=0$ 尺度层到 $j=J$ 尺度层的重构算法过程可用图 6-2 表示.

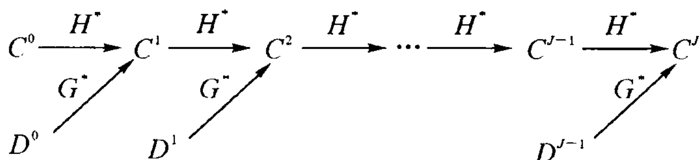


图 6-2　重构算法结构示意图

综合上述结果，我们有如下定理.

定理 6.1　设 $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 OMRA，$\{h_k\}$ 与 $\{g_k\}$ 是相应的小波滤波器系数，则

（1） Mallat 分解算法为

$$\begin{cases} c_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p \in \mathbf{Z}} c_{j+1,p} \overline{h_{p-2k}}, \\ d_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p \in \mathbf{Z}} c_{j+1,p} \overline{g_{p-2k}}; \end{cases} \tag{6.17}$$

（2） Mallat 重构算法为

$$\begin{cases} \widetilde{c}_{j+1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p \in \mathbf{Z}} c_{j,(k-p)/2} h_p, \\ \widetilde{d}_{j+1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p \in \mathbf{Z}} d_{j,(k-p)/2} g_p, \\ c_{j+1,k} = \widetilde{c}_{j+1,k} + \widetilde{d}_{j+1,k}. \end{cases} \tag{6.18}$$

例 6.1　考虑一个实小波，其滤波器仅有 6 个非零系数

$$h_{-2},\ h_{-1},\ h_0,\ h_1,\ h_2,\ h_3.$$

根据公式(6.17)，分解算法为

$$\begin{cases} c_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(h_{-2}c_{j+1,2k-2} + h_{-1}c_{j+1,2k-1} + h_0c_{j+1,2k} \\ \qquad + h_1c_{j+1,2k+1} + h_2c_{j+1,2k+2} + h_3c_{j+1,2k+3}), \\ d_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-h_{-2}c_{j+1,2k+3} + h_{-1}c_{j+1,2k+2} - h_0c_{j+1,2k+1} \\ \qquad + h_1c_{j+1,2k} - h_2c_{j+1,2k-1} + h_3c_{j+1,2k-2}). \end{cases}$$

对于重构算法，由(6.18)式不难看出，可把滤波器分为两组，即

$$\{h_{-2}, h_0, h_2\} \text{ 与 } \{h_{-1}, h_1, h_3\}.$$

相应地，把 $\tilde{c}_{j+1,k}$ 的计算分两步进行：

先计算具有偶数下标的系数 $\tilde{c}_{j+1,2k}$，此时只需用$\{h_{-2}, h_0, h_2\}$，得

$$\tilde{c}_{j+1,2k} = h_2c_{j,k-1} + h_0c_{j,k} + h_{-2}c_{j,k+1};$$

再计算具有奇数下标的系数 $\tilde{c}_{j+1,2k+1}$，此时只需用$\{h_{-1}, h_1, h_3\}$，得

$$\tilde{c}_{j+1,2k+1} = h_3c_{j,k-1} + h_1c_{j,k} + h_{-1}c_{j,k+1}.$$

同理，计算$\{\tilde{d}_{j+1,k}\}$时也可分为两步进行，计算结果为

$$\tilde{d}_{j+1,2k} = g_2d_{j,k-1} + g_0d_{j,k} + g_{-2}d_{j,k+1},$$

$$\tilde{d}_{j+1,2k+1} = g_3d_{j,k-1} + g_1d_{j,k} + g_{-1}d_{j,k+1}.$$

最后可得

$$c_{j+1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{c}_{j+1,2k} + \tilde{c}_{j+1,2k+1} + \tilde{d}_{j+1,2k} + \tilde{d}_{j+1,2k+1}).$$

6.2.3 边界延拓问题

在利用小波处理信号或图像时，一个不可回避的问题是边界效应现象. 因为实际的数字信号总是有限长序列，而大多数小波滤波器的长度都大于1(除 Haar 小波外)，所以 Mallat 算法在信号的边界上必然将滤波器强行截去一部分后再作用于这个有限长序列来实现小波分解. 这样，再经过后续处理(如边界提取、噪声去除等)之后重构得到的信号与原始信号不可避免地在边界上产生较大误差，我们称这一现象为边界效应. 为了解决这一问题，最根本的方法是构造区间正交小波. 对于一般的小波，也可以通过边界延拓方法适当增加原始信号的长度，以保证信号的精确重构.

不失一般性，设信号的长度为 N，即 $c = \{c_0, c_1, \cdots, c_{N-1}\}$. 又设滤波器的长度是 l. 进行小波分解时只需要在信号的左右两端各延拓 $L = \lceil \frac{l}{2} \rceil$个元素即可，这里$\lceil a \rceil = \min\{k \in \mathbf{Z} | a \leqslant k\}$，例如$\lceil 2.5 \rceil = 3$. 延拓后的信号 $\tilde{c}$ 的

长度是 $N+2L$.

常用的边界延拓方法有：零延拓、常数延拓、对称延拓以及周期延拓等4种方法.

(1) 零延拓　这种方法等效于对小波滤波器的截断，即

$$\tilde{c}=\{\underbrace{0,\cdots,0}_{L},c_0,c_1,\cdots,c_{N-1},\underbrace{0,\cdots,0}_{L}\}.$$

(2) 常数延拓　这种方法是在信号边界之外添加常数，即

$$\tilde{c}=\{\underbrace{c_0,\cdots,c_0}_{L},c_0,c_1,\cdots,c_{N-1},\underbrace{c_{N-1},\cdots,c_{N-1}}_{L}\}.$$

(3) 对称延拓　这种方法等效于对信号在边界上作对称折叠. 当 l 是偶数时，即

$$\tilde{c}=\{\underbrace{c_{L-1},\cdots,c_1,c_0}_{L},c_0,c_1,\cdots,c_{N-1},\underbrace{c_{N-1},c_{N-2},\cdots,c_{N-L}}_{L}\}.$$

当 l 是奇数时，即

$$\tilde{c}=\{\underbrace{c_L,\cdots,c_2,c_1}_{L},c_0,c_1,\cdots,c_{N-1},\underbrace{c_{N-2},c_{N-3},\cdots,c_{N+L-1}}_{L}\}.$$

(4) 周期延拓　这是经常使用的延拓方法，相当于对信号头尾相接，作成循环信号，即

$$\tilde{c}=\{\underbrace{c_{N-L},\cdots,c_{N-2},c_{N-1}}_{L},c_0,c_1,\cdots,c_{N-1},\underbrace{c_0,c_1,\cdots,c_{L-1}}_{L}\}.$$

在实际应用中，一般根据小波的性质采用对称延拓和周期延拓这两种方法. 如果小波具有对称性，那么对称延拓的效果比较好. 对于非对称小波，往往采用周期延拓法. 文献[213]还介绍了两种对称周期延拓方法，并且较为详尽地阐述了有关特性，这里就不再讨论了.

6.3 双正交小波与提升格式

在实际应用中，人们往往要求小波同时具有正交性、对称性、紧支集等多种性质. 但Daubechies已经证明：对于实小波，只有Haar小波同时具有正交性，对称性和紧支集性质，而Haar小波的根本缺陷是光滑性较差. 双正交小波较好地解决了这个问题，我们在第五章已经详细阐述了有关理论，这一节主要介绍双正交小波的Mallat算法与提升构造问题.

6.3.1 双正交小波的 Mallat 算法

设$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$和$\{V_j^*\}_{j\in\mathbf{Z}}$为$L^2(\mathbf{R})$的一组双正交(或对偶) GMRA：

$$\begin{cases}V_{j+1}=V_j\oplus W_j,\\ V_{j+1}^*=V_j^*\oplus W_j^*,\\ V_j\perp W_j^*,\ W_j\perp V_j^*,\quad j\in\mathbf{Z},\end{cases}\tag{6.19}$$

其中W_j是V_j在V_{j+1}中的补集，不一定是正交补；W_j^*是V_j^*在V_{j+1}^*中的补集，也不一定是正交补，$\oplus$表示直和运算，$\perp$表示正交运算.

又设$\{\varphi(t),\psi(t),\varphi^*(t),\psi^*(t)\}$为相应的双正交小波系统，相应的双尺度方程为

$$\begin{cases}\varphi(t)=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}h_k\varphi(2t-k),\\ \psi(t)=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}g_k\varphi(2t-k),\\ \varphi^*(t)=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}h_k^*\varphi^*(2t-k),\\ \psi^*(t)=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}g_k^*\varphi^*(2t-k).\end{cases}\tag{6.20}$$

其等价的频域形式为

$$\begin{cases}\hat{\varphi}(2\omega)=H(\omega)\hat{\varphi}(\omega),\\ \hat{\psi}(2\omega)=G(\omega)\hat{\varphi}(\omega),\\ \hat{\varphi}^*(2\omega)=H^*(\omega)\hat{\varphi}^*(\omega),\\ \hat{\psi}^*(2\omega)=G^*(\omega)\hat{\varphi}^*(\omega).\end{cases}\tag{6.21}$$

其中双正交滤波器组$\{H(\omega),H^*(\omega),G(\omega),G^*(\omega)\}$为

$$\begin{cases}H(\omega)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}h_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega},\\ G(\omega)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}g_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}\\ H^*(\omega)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}h_k^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega},\\ G^*(\omega)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}g_k^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}\end{cases}\tag{6.22}$$

和双正交(或对偶)关系：$\forall l\in\mathbf{Z}$，有

$$\begin{cases}\langle\varphi^*,\psi(\cdot-l)\rangle=\langle\varphi,\psi^*(\cdot-l)\rangle=0,\\ \langle\varphi^*,\varphi(\cdot-l)\rangle=\langle\psi^*,\psi(\cdot-l)\rangle=\delta_{0,l},\end{cases}\tag{6.23}$$

并且$\{2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^jt-k), k\in\mathbf{Z}\}$和$\{2^{\frac{j}{2}}\varphi^*(2^jt-k), k\in\mathbf{Z}\}$分别构成$V_j$和$V_j^*$的 Riesz 基，$\{2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jt-k), k\in\mathbf{Z}\}_{j\in\mathbf{Z}}$和$\{2^{\frac{j}{2}}\psi^*(2^jt-k), k\in\mathbf{Z}\}_{j\in\mathbf{Z}}$均构成$L^2(\mathbf{R})$的 Riesz 基.

下面我们给出相应的分解和重构算法.

对于$j\in\mathbf{Z}$，定义投影算子：

$$\begin{cases} P_j: L^2(\mathbf{R})\to V_j, \quad P_jf=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\langle f,\varphi_{j,k}^*\rangle\varphi_{j,k}=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{j,k}\varphi_{j,k}, \\ Q_j: L^2(\mathbf{R})\to W_j, \quad Q_jf=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\langle f,\psi_{j,k}^*\rangle\psi_{j,k}=\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_{j,k}\psi_{j,k}, \end{cases} \tag{6.24}$$

其中$c_{j,k}=\langle f,\varphi_{j,k}^*\rangle$，$d_{j,k}=\langle f,\psi_{j,k}^*\rangle$.

由双尺度方程

$$\varphi(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\varphi(2t-k),$$

我们有

$$\begin{aligned}\varphi_{j,k}(t)&=2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^jt-k)=2^{\frac{j}{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}h_p\varphi(2(2^jt-k)-p)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}h_p2^{\frac{j+1}{2}}\varphi(2^{j+1}t-2k-p)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}h_{p-2k}\varphi_{j+1,p}(t).\end{aligned}$$

同理，有

$$\begin{cases}\psi_{j,k}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}g_{p-2k}\varphi_{j+1,p}(t),\\ \varphi_{j,k}^*(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}h_{p-2k}^*\varphi_{j+1,p}^*(t),\\ \psi_{j,k}^*(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}g_{p-2k}^*\varphi_{j+1,p}^*(t).\end{cases} \tag{6.25}$$

由此，我们可以建立分解公式

$$\begin{aligned}c_{j,k}&=\langle f,\varphi_{j,k}^*\rangle=\langle f,\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}h_{p-2k}^*\varphi_{j+1,p}^*\rangle\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}\overline{h_{p-2k}}^*\langle f,\varphi_{j+1,p}^*\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}\overline{h_{p-2k}}^*c_{j+1,p}.\end{aligned}$$

同理有

$$d_{j,k}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}\overline{g_{p-2k}}^*c_{j+1,p}.$$

反过来，有重构公式

$$
\begin{aligned}
c_{j+1,k} &= \langle f, \varphi_{j+1,k}^* \rangle = \langle P_j f + Q_j f, \varphi_{j+1,k}^* \rangle \\
&= \langle P_j f, \varphi_{j+1,k}^* \rangle + \langle Q_j f, \varphi_{j+1,k}^* \rangle \\
&= \langle \sum_{p\in\mathbf{Z}} c_{j,p}\varphi_{j,p}, \varphi_{j+1,k}^* \rangle + \langle \sum_{p\in\mathbf{Z}} d_{j,p}\psi_{j,p}, \varphi_{j+1,k}^* \rangle \\
&= \langle \sum_{p\in\mathbf{Z}} c_{j,p} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m\in\mathbf{Z}} h_{m-2p}\varphi_{j+1,m}, \varphi_{j+1,k}^* \rangle \\
&\quad + \langle \sum_{p\in\mathbf{Z}} d_{j,p} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m\in\mathbf{Z}} g_{m-2p}\varphi_{j+1,m}, \varphi_{j+1,k}^* \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p\in\mathbf{Z}} h_{k-2p}c_{j,p} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p\in\mathbf{Z}} g_{k-2p}d_{j,p},
\end{aligned}
$$

从而下面结果成立.

定理6.2 设投影算子 P_j, Q_j 的定义如(6.24)式，则有如下分解和重构算法：

(1) 分解算法：

$$
\begin{cases}
c_{j,k} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sum\limits_{p\in\mathbf{Z}} \overline{h_{p-2k}^*}\, c_{j+1,p}, \\
d_{j,k} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sum\limits_{p\in\mathbf{Z}} \overline{g_{p-2k}^*}\, c_{j+1,p};
\end{cases}
\tag{6.26}
$$

(2) 重构算法：

$$
c_{j+1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p\in\mathbf{Z}} h_{k-2p}c_{j,p} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p\in\mathbf{Z}} g_{k-2p}d_{j,p}. \tag{6.27}
$$

我们看到，双正交小波的 Mallat 算法(6.26)，(6.27) 与正交小波的 Mallat 算法(6.14)，(6.15) 及(6.17) 很相似. 但在双正交情形，分解与重构过程采用的分别是不同的两对滤波器，分解时用的是$\{h_k^*\}$，$\{g_k^*\}$，而重构时用的则是另一对滤波器$\{h_k\}$，$\{g_k\}$. 正因为如此，我们把$\{h_k^*\}$，$\{g_k^*\}$称为小波分析滤波器，把$\{h_k\}$，$\{g_k\}$称为小波综合滤波器.

6.3.2 提升格式的频域表示

迄今为止，我们所接触到的小波理论都是建立在 Fourier 分析的基础之上的，因此不可避免地受到Fourier分析的局限. 1994年，Sweldens提出了一种不依赖于 Fourier 变换的小波变换技术并称之为**提升格式**(Lifting Scheme)，其主要的新颖之处在于：一是可根据需要来设计小波，通过不断修正来提升小波的性质(如消失矩等)；二是能够改进小波变换算法以提高算

法的速度.

下面我们假设尺度函数、小波函数及它们的对偶都为紧支集的，则它们相应的双尺度符号为三角多项式，也就是双尺度方程中只有有限个系数非零，则双正交条件(6.23)的一个必要条件为

$$M^*(\omega)\overline{M}^{\mathrm{T}}(\omega)=\boldsymbol{I}, \tag{6.28}$$

其中

$$M(\omega)=\begin{bmatrix}H(\omega) & H(\omega+\pi)\\ G(\omega) & G(\omega+\pi)\end{bmatrix},$$

$$M^*(\omega)=\begin{bmatrix}H^*(\omega) & H^*(\omega+\pi)\\ G^*(\omega) & G^*(\omega+\pi)\end{bmatrix}.$$

我们选择

$$\begin{cases}G(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\,\overline{H^*(\omega+\pi)},\\ G^*(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\,\overline{H(\omega+\pi)},\end{cases} \tag{6.29}$$

则条件(6.28)等价于

$$\begin{cases}H^*(\omega)\,\overline{H(\omega)}+H^*(\omega+\pi)\,\overline{H(\omega+\pi)}=1,\\ H^*(\omega)\,\overline{G(\omega)}+H^*(\omega+\pi)\,\overline{G(\omega+\pi)}=0.\end{cases} \tag{6.30}$$

当 $H(\omega)=H^*(\omega)$ 时即为正交情形，此时式(6.30)为

$$|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2=1.$$

由双尺度方程(6.20)式有

$$\hat{\varphi}(\omega)=\prod_{j=1}^{+\infty}H(2^{-j}\omega),\quad \hat{\varphi}^*(\omega)=\prod_{j=1}^{+\infty}H^*(2^{-j}\omega). \tag{6.31}$$

我们要求此处的无穷乘积绝对收敛，并在任何紧集上一致收敛.

从低通滤波器得到高通滤波器有多种方法，这可由下面的定理给出.

定理6.3 设 $H(\omega)$,$H^*(\omega)$ 为在(6.30)式意义下的双正交滤波器，则 $G(\omega)$，$G^*(\omega)$ 满足(6.28)式当且仅当

$$\begin{cases}G^*(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\,\overline{H(\omega+\pi)k(2\omega)},\\ G(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\,\overline{H^*(\omega+\pi)k^{-1}(2\omega)},\end{cases} \tag{6.32}$$

其中 $k(\omega)$ 为 Wiener 类函数，$k(\omega)\neq 0$.

所谓 Wiener 类函数 $P(z)$，其中 z 是复变量，即在 $P(z)$ 的 Laurent 展开式 $P(z)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}p_kz^k$ 中，系数序列 $\{p_k\}\in l^1$.

由定理 6.3 可知，只有当 $k(\omega)$ 为单项式时，$G(\omega)$,$G^*(\omega)$ 均为三角多项式. 下面我们就针对这种情形进行讨论.

引理6.4 设 $\varphi(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 是给定的尺度函数，$H(\omega)$ 为相应的滤波器，且满足

$$0<A\leqslant|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2\leqslant B,$$

其中 A,B 为两个正常数. 又设 $H_0^*(\omega)$ 与 $H(\omega)$ 双正交，则 $H^*(\omega)$ 与 $H(\omega)$ 双正交的充分必要条件是

$$H^*(\omega)=H_0^*(\omega)+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\overline{H(\omega+\pi)s(2\omega)},\tag{6.33}$$

其中 $s(\omega)$ 为三角多项式.

证 先证充分性. 设(6.33)式成立，因为 $H_0^*(\omega)$ 与 $H(\omega)$ 双正交，并注意到 $H(\omega)$ 的 2π 周期性，所以

$$\begin{aligned}1&=H_0^*(\omega)\overline{H(\omega)}+H_0^*(\omega+\pi)\overline{H(\omega+\pi)}\\&=\left(H^*(\omega)-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\overline{H(\omega+\pi)s(2\omega)}\right)\overline{H(\omega)}\\&\quad+\left(H^*(\omega+\pi)+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\overline{H(\omega)s(2\omega)}\right)\overline{H(\omega+\pi)}\\&=H^*(\omega)\overline{H(\omega)}+H^*(\omega+\pi)\overline{H(\omega+\pi)}.\end{aligned}$$

再证必要性. 由题设条件 $A\leqslant|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2\leqslant B$ 知，$H(\omega)$ 与 $H(\omega+\pi)$ 不可能同时为零. 令 $\Delta(\omega)=H^*(\omega)-H_0^*(\omega)$，则

$$\Delta(\omega)\overline{H(\omega)}+\Delta(\omega+\pi)\overline{H(\omega+\pi)}=0,$$

对 $\dfrac{\Delta(\omega)}{\overline{H(\omega+\pi)}}$ 利用例 1.28，即得

$$\Delta(\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\overline{H(\omega+\pi)s(2\omega)},$$

其中 $s(2\omega)$ 为三角多项式. ∎

以上引理给出了与一个给定的滤波器双正交的所有滤波器的形式. 于是我们可以得到双正交小波的提升格式如下：

推论6.5 设 $\{H(\omega),H_0^*(\omega),G_0(\omega),G^*(\omega)\}$ 是一组双正交滤波器，令

$$\begin{cases}H^*(\omega)=H_0^*(\omega)+G^*(\omega)\overline{s(2\omega)},\\G(\omega)=G_0(\omega)-H(\omega)s(2\omega),\end{cases}\tag{6.34}$$

则 $\{H(\omega),H^*(\omega),G(\omega),G^*(\omega)\}$ 也是一组双正交滤波器.

证 由(6.34),(6.29)以及(6.33)式可知

$$\begin{aligned}H^*(\omega)&=H_0^*(\omega)+G^*(\omega)\overline{s(2\omega)}\\&=H_0^*(\omega)+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\overline{H(\omega+\pi)s(2\omega)},\\G(\omega)&=G_0(\omega)-H(\omega)s(2\omega)\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\overline{H_0^*(\omega+\pi)}-H(\omega)s(2\omega)\end{aligned}$$

$$= e^{-i\omega}(\overline{H_0^*(\omega+\pi)} - e^{i\omega}H(\omega)s(2\omega))$$
$$= e^{-i\omega}\overline{H^*(\omega+\pi)}.$$ ∎

我们注意到，经过一次提升，尺度函数与对偶小波并未改变，而小波与对偶尺度函数都发生了变化. 由于

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\omega) &= G\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\\ &= G_0\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) - H\left(\frac{\omega}{2}\right)s(\omega)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\\ &= G_0\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) - \hat{\varphi}(\omega)s(\omega),\end{aligned} \tag{6.35}$$

从而可以得到

$$\psi(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} g_k^0\varphi(2t-k) - \sum_{k\in\mathbf{Z}} s_k\varphi(t-k). \tag{6.36}$$

同理，因为

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}^*(\omega) &= H^*\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}\right)\\ &= H_0^*\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}\right) + G^*\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{s(\omega)}\,\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}\right)\\ &= H_0^*\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}\right) + \overline{s(\omega)}\,\hat{\psi}^*(\omega),\end{aligned} \tag{6.37}$$

所以

$$\varphi^*(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k^{*0}\varphi^*(2t-k) + \sum_{k\in\mathbf{Z}} s_{-k}\psi^*(t-k). \tag{6.38}$$

从而有下面的时域形式的提升格式.

定理6.6 设$\{\varphi(t),\varphi_0^*(t),\psi_0(t),\psi^*(t)\}$是一组给定的初始的双正交尺度函数和小波，则一组新的双正交尺度函数和小波$\{\varphi(t),\varphi^*(t),\psi(t),\psi^*(t)\}$可定义如下：

$$\begin{cases}\varphi(t) = \varphi(t),\\ \psi(t) = \psi_0(t) - \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} s_k\varphi(t-k),\\ \varphi^*(t) = \tilde{\varphi}(t) + \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} s_{-k}\psi^*(t-k),\\ \psi^*(t) = \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} g_k^*\varphi^*(2t-k),\end{cases} \tag{6.39}$$

其中 $\psi_0(t) = \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} g_k^0\varphi(2t-k)$，而 $\tilde{\varphi}(t) = \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} h_k^{*0}\varphi^*(2t-k)$.

6.3.3 双正交小波的提升构造

利用提升格式，我们可以从一个最简单的小波(如 Haar 小波) 出发，构造出具有对称性、高阶消失矩等优良性质的双正交小波.

例 6.2 Haar 小波的提升 已知

$$H_0^*(\omega) = H(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-i\omega},$$

$$G^*(\omega) = G_0(\omega) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-i\omega},$$

我们希望经过提升后的小波具有二阶消失矩.

注意到 $H(0) = 1$，$G_0(\pi) = -1$，$G_0(0) = 0$，根据(6.34)式，取

$$G(\omega) = G_0(\omega) - H(\omega)s(2\omega),$$

则

$$G'(\omega) = G_0{}'(\omega) - H'(\omega)s(2\omega) - 2H(\omega)s'(2\omega).$$

因为 Haar 小波具有一阶消失矩，所以

$$G(0) = G_0(0) - H(0)s(0) = 0 - s(0) = 0.$$

由此可知 $s(0) = 0$.

如果要求提升后的小波具有二阶消失矩，则

$$G'(0) = G_0'(0) - H'(0)s(0) - 2H(0)s'(0) = 0,$$

即

$$-\frac{i}{2} + \frac{i}{2}s(0) - 2s'(0) = 0,$$

解得 $s'(0) = -\frac{i}{4}$. 为了保证对称性，我们取 $s(\omega) = -\frac{i}{4}\sin\omega$，则

$$\begin{aligned}
H^*(\omega) &= H_0^*(\omega) + G^*(\omega)\overline{s(2\omega)} \\
&= \frac{1}{2}(1+e^{-i\omega}) + \frac{1}{2}(-1+e^{-i\omega})\left(\frac{i}{4}\sin 2\omega\right) \\
&= \frac{1}{2}(1+e^{-i\omega}) + \frac{1}{16}(-1+e^{-i\omega})(e^{i2\omega} - e^{-i2\omega}) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-i\omega} + \frac{1}{16}e^{i\omega} - \frac{1}{16}e^{i2\omega} + \frac{1}{16}e^{-i2\omega} - \frac{1}{16}e^{-i3\omega}.
\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}
G(\omega) &= G_0(\omega) - H(\omega)s(2\omega) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-i\omega} + \frac{1}{16}e^{i\omega} + \frac{1}{16}e^{i2\omega} - \frac{1}{16}e^{-i2\omega} - \frac{1}{16}e^{-i3\omega}.
\end{aligned}$$

这刚好对应于 Cohen-Daubechies 双正交小波.

6.3.4 提升格式的 Mallat 算法

下面，我们给出提升格式的小波分解与重构算法.

利用双尺度方程与提升格式

$$\varphi(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\varphi(2t-k),$$

$$\psi_0(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}g_k^0\varphi(2t-k),$$

$$\psi(t)=\psi_0(t)-\sum_{n\in\mathbf{Z}}s_n\varphi(t-n),$$

有

$$\begin{aligned}\varphi_{j,k}(t)&=2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^jt-k)=2^{\frac{j}{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}h_p\varphi(2(2^jt-k)-p)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}h_p2^{\frac{j+1}{2}}\varphi(2^{j+1}t-2k-p)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}h_p\varphi_{j+1,2k+p}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}h_{p-2k}\varphi_{j+1,p}(t),\\\psi_{j,k}(t)&=2^{\frac{j}{2}}\Big(\psi_0(2^jt-k)-\sum_{m\in\mathbf{Z}}s_m\varphi(2^jt-k-m)\Big)\\&=2^{\frac{j}{2}}\Big(\sum_{p\in\mathbf{Z}}g_p^0\varphi(2(2^jt-k)-p)\\&\qquad-\sum_{m\in\mathbf{Z}}s_{m-k}\sum_{p\in\mathbf{Z}}h_p\varphi(2(2^jt-m)-p)\Big)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}g_p^02^{\frac{j+1}{2}}\varphi(2^{j+1}t-2k-p)\\&\qquad-\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m\in\mathbf{Z}}s_{m-k}\sum_{p\in\mathbf{Z}}h_p2^{\frac{j+1}{2}}\varphi(2^{j+1}t-2m-p)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}g_p^0\varphi_{j+1,2k+p}(t)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m\in\mathbf{Z}}s_{m-k}\sum_{p\in\mathbf{Z}}h_p\varphi_{j+1,2m+p}(t)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}g_{p-2k}^0\varphi_{j+1,p}(t)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m\in\mathbf{Z}}s_{m-k}\sum_{p\in\mathbf{Z}}h_{p-2m}\varphi_{j+1,p}(t).\end{aligned}$$

同理，由双尺度方程与提升格式

$$\varphi^*(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k^{*\,0}\varphi^*(2t-k)+\sum_{k\in\mathbf{Z}}s_{-k}\psi^*(t-k),$$

$$\psi^*(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}g_k^*\varphi^*(2t-k),$$

可得

$$\varphi_{j,k}^{*}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}h_{p-2k}^{*\,0}\varphi_{j+1,p}^{*}(t)+\sum_{m\in\mathbf{Z}}s_{k-m}\psi_{j,m}^{*}(t),$$

$$\psi_{j,k}^{*}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}g_{p-2k}^{*}\varphi_{j+1,p}^{*}(t).$$

因此可以建立分解公式

$$\begin{aligned}c_{j,k}&=\langle f,\varphi_{j,k}^{*}\rangle=\langle f,\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}h_{p-2k}^{*\,0}\varphi_{j+1,p}^{*}+\sum_{m\in\mathbf{Z}}s_{k-m}\psi_{j,m}^{*}\rangle\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}\overline{h}_{p-2k}^{*\,0}\langle f,\varphi_{j+1,p}^{*}\rangle+\sum_{m\in\mathbf{Z}}\overline{s_{k-m}}\langle f,\psi_{j,m}^{*}\rangle\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}\overline{h}_{p-2k}^{*\,0}c_{j+1,p}+\sum_{m\in\mathbf{Z}}\overline{s_{k-m}}d_{j,m}.\end{aligned}\tag{6.40}$$

同理有

$$d_{j,m}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}\overline{g_{p-2k}}^{*}c_{j+1,p}.\tag{6.41}$$

反之，有重构公式

$$\begin{aligned}c_{j+1,k}&=\langle f,\varphi_{j+1,k}^{*}\rangle=\langle P_jf+Q_jf,\varphi_{j+1,k}^{*}\rangle\\&=\langle P_jf,\varphi_{j+1,k}^{*}\rangle+\langle Q_jf,\varphi_{j+1,k}^{*}\rangle\\&=\langle\sum_{p\in\mathbf{Z}}c_{j,p}\varphi_{j,p},\varphi_{j+1,k}^{*}\rangle+\langle\sum_{p\in\mathbf{Z}}d_{j,p}\psi_{j,p},\varphi_{j+1,k}^{*}\rangle\\&=\langle\sum_{p\in\mathbf{Z}}c_{j,p}\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_{n-2p}\varphi_{j+1,n},\varphi_{j+1,k}^{*}\rangle\\&\quad+\langle\sum_{p\in\mathbf{Z}}d_{j,p}\frac{1}{\sqrt{2}}(\sum_{n\in\mathbf{Z}}g_{n-2p}^{0}\varphi_{j+1,n}-\sum_{m\in\mathbf{Z}}s_{m-p}\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_{n-2m}\varphi_{j+1,n}),\varphi_{j+1,k}^{*}\rangle\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}h_{k-2p}c_{j,p}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}d_{j,p}(g_{k-2p}^{0}-\sum_{m\in\mathbf{Z}}s_{m-p}h_{k-2m})\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}h_{k-2p}(c_{j,p}-\sum_{m\in\mathbf{Z}}s_{p-m}d_{j,m})+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}g_{k-2p}^{0}d_{j,p}.\end{aligned}\tag{6.42}$$

在实际应用中可按下面的步骤来实现分解与重构算法.

分解过程：

第一步　计算提升前的系数

$$c_{j,k}^{*}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}\overline{h_{p-2k}}^{*\,0}c_{j+1,p},$$

$$d_{j,k}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}\overline{g_{p-2k}}^{*}c_{j+1,p}.$$

第二步　计算提升后的系数

$$c_{j,k}=c_{j,k}^{*}+\sum_{m\in\mathbf{Z}}s_{k-m}d_{j,m}.$$

重构过程:

第一步 计算

$$c_{j,k}^{*}=c_{j,k}-\sum_{m\in\mathbf{Z}}s_{k-m}d_{j,m}.$$

第二步 计算

$$c_{j+1,k}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}h_{k-2p}c_{j,p}^{*}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}g_{k-2p}^{0}d_{j,p}.$$

6.4 提升格式与整数小波变换

小波在图像处理中具有广泛的应用. 通常的小波滤波器都是小数形式，而实际的数字图像都采用整数表示，如果通过 Mallat 算法来实现小波变换，那么经过变换(即滤波)后的数据就不再是整数，因而无法实现无失真的小波重构. 这就限制了小波变换的应用. 提升格式(Lifting Scheme) 不仅提供了构造紧支集双正交小波的一种方法，而且也能够实现从整数到整数的小波变换. 任何小波变换都可用提升方法实现.

6.4.1 提升格式的多相位结构

考虑小波滤波器 $H=\{h_k,\ k\in\mathbf{Z}\}$ 的 z 变换，记为 $H(z)$，即

$$H(z)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k z^{-k},\tag{6.43}$$

称为滤波器 H 的多相位表示或者 z 域表示. 显然，有

$$H(z)=H_e(z^2)+z^{-1}H_o(z^2),\tag{6.44}$$

其中，$H_e(z)$ 和 $H_o(z)$ 分别与 $H(z)$ 中的偶次项与奇次项部分对应，即

$$H_e(z)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_{2k}z^{-k},\quad H_o(z)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_{2k+1}z^{-k},\tag{6.45}$$

或者

$$H_e(z^2)=\frac{1}{2}(H(z)+H(-z)),$$

$$H_o(z^2)=\frac{z}{2}(H(z)-H(-z)).$$

对于滤波器 G，对偶滤波器 H^*，G^*，也有类似的多相位表示.

定义 H 和 G 的多相位矩阵(Polyphase Matrix) 为

$$P(z)=\begin{pmatrix}H_e(z) & G_e(z)\\ H_o(z) & G_o(z)\end{pmatrix}, \tag{6.46}$$

易知

$$P(z^2)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}H(z) & H(-z)\\ G(z) & G(-z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & z\\ 1 & -z\end{pmatrix}.$$

类似地，H^* 和 G^* 的多相位矩阵，亦即 H 和 G 的对偶多相位矩阵为

$$P^*(z)=\begin{pmatrix}H_e^*(z) & G_e^*(z)\\ H_o^*(z) & G_o^*(z)\end{pmatrix}. \tag{6.47}$$

所以

$$P^*(z^2)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}H^*(z) & H^*(-z)\\ G^*(z) & G^*(-z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & z\\ 1 & -z\end{pmatrix}.$$

因此，双正交小波的精确重构条件(6.28)或(6.30)可以写成

$$P(z)P^*(z^{-1})^{\mathrm{T}}=I, \tag{6.48}$$

其中，I 为 2×2 单位矩阵.

现在，我们将提升格式(频域形式(6.34)，时域形式(6.39))用多相位形式重新叙述如下.

定理6.7 设$\{H(z),H_0^*(z),G_0(z),G^*(z)\}$是一组双正交滤波器，令

$$\begin{cases}H^*(z)=H_0^*(z)-G^*(z)u(z^{-2}),\\ G(z)=G_0(z)+H(z)u(z^2),\end{cases} \tag{6.49}$$

其中 $u(z)$ 是一个 Laurent 多项式，则$\{H(z),H^*(z),G(z),G^*(z)\}$也是一组双正交滤波器.

定理6.8(对偶提升) 设$\{H_0(z),H^*(z),G(z),G_0^*(z)\}$是一组双正交滤波器，令

$$\begin{cases}H(z)=H_0(z)+G(z)v(z^2),\\ G^*(z)=G_0^*(z)-H^*(z)v(z^{-2}),\end{cases} \tag{6.50}$$

其中 $v(z)$ 是一个 Laurent 多项式，则$\{H(z),H^*(z),G(z),G^*(z)\}$也是一组双正交滤波器.

容易知道，$H(z)u(z^2)$ 的多相位分量的偶部与奇部分别为 $H_e(z)u(z)$ 和 $H_o(z)u(z)$，因此按(6.49)式经过一次提升，新的滤波器组的多相位矩阵 $P_1(z)$ 及对偶多相位矩阵 $P_1^*(z)$ 分别为

$$P_1(z) = P(z)\begin{pmatrix} 1 & u(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_1^*(z) = P^*(z)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u(z^{-1}) & 1 \end{pmatrix}.$$

同理，关于对偶提升，也有类似的结论. 读者可自行给出.

根据(6.48)式，可以给出双正交小波分解与重构的多相位表示.

设输入序列$\{x_n\}$的z变换为$x(z)$，则

$$x(z) = x_e(z^2) + z^{-1}x_o(z^2),$$

其中$x_e(z)$和$x_o(z)$分别为偶序列$\{x_{2n}\}$和奇序列$\{x_{2n+1}\}$的z变换. 如果将输出的低频分量与高频分量的z变换分别记为$s(z)$和$d(z)$，那么分解与重构算法(6.26)与(6.27)用多相位表示即

$$\begin{pmatrix} s(z) \\ d(z) \end{pmatrix} = P^*(z^{-1})^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} x_e(z) \\ x_o(z) \end{pmatrix} \tag{6.51}$$

与

$$\begin{pmatrix} x_e(z) \\ x_o(z) \end{pmatrix} = P(z)\begin{pmatrix} s(z) \\ d(z) \end{pmatrix}. \tag{6.52}$$

考虑一个很特殊的小波，其滤波器系数$h_k^* = h_k = 2\delta_{k0}$，$g_k^* = g_k = 2\delta_{k1}$，则

$$\begin{cases} H^*(z) = H(z) = 1, \\ G^*(z) = G(z) = z^{-1}. \end{cases}$$

于是，相位矩阵$P(z)$及$P^*(z)$都为单位矩阵. 根据(6.51)式可知，此时的小波变换仅仅是简单地把输入数据一分为二，偶序列组成逼近分量，而奇序列组成小波分量. 因此，人们形象地称这样的小波为 Lazy 小波.

对于有限滤波器$H = \{h_k | k \in \mathbf{Z}, k_1 \leqslant k \leqslant k_2\}$，其中$h_k = 0$，$\forall k < k_1$且$k > k_2$. 显然，$H$的$z$变换是一个 Laurent 多项式$H(z)$，即

$$H(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=k_1}^{k_2} h_k z^{-k}.$$

于是，$H(z)$的次数为

$$|H(z)| = k_2 - k_1.$$

因此，滤波器的长度等于其相应 Laurent 多项式的次数加 1.

对于紧支集双正交小波，其滤波器都是有限长的，所以$P(z)$与$P^*(z)$的行列式$\det P(z)$和$\det P^*(z)$都是 Laurent 多项式. 由式(6.48)可知，$\det P(z)$及其倒数都是 Laurent 多项式，故$\det P(z)$为z的单项式. 容易证

明：存在常数 $a \neq 0$，$k \in \mathbf{Z}$，使得

$$G^*(z) = az^{-(2k+1)}H(-z^{-1}), \quad G(z) = a^{-1}z^{-(2k+1)}H^*(-z^{-1}).$$

通常取 $a=1$，$k=0$，则

$$G^*(z) = z^{-1}H(-z^{-1}), \quad G(z) = z^{-1}H^*(-z^{-1}),$$

此即(6.29)式. 或者等价地有

$$\begin{cases} H_e^*(z) = G_o(z^{-1}), & H_o^*(z) = -G_e(z^{-1}), \\ G_e^*(z) = -H_o(z^{-1}), & G_o^*(z) = H_e(z^{-1}). \end{cases}$$

下面，我们将根据小波分解与重构的多相位表示，通过对多相位矩阵 $P(z)$ 或 $P^*(z)$ 进行因子分解，给出小波变换的提升实现算法.

6.4.2 Laurent 多项式的 Euclid 算法

设 $a(z)$ 和 $b(z)$ 为 Laurent 多项式，满足 $|a(z)| \geqslant |b(z)|$，$b(z) \neq 0$，则有如下带余除法：

$$a(z) = b(z)q(z) + r(z),$$

其中，$q(z)$ 和 $r(z)$ 分别称为商和余式，满足 $|q(z)| = |a(z)| - |b(z)|$，$|r(z)| < |b(z)|$ 或 $r(z) = 0$.

为方便起见，记 $q(z) = a(z)/b(z)$，$r(z) = a(z)\%b(z)$.

需要指出的是，两个 Laurent 多项式的商和余式并不是唯一的. 例如，对于 $a(z) = z^{-2} + 2z + 3z^2$，$b(z) = z^{-1} + z$，则下列两种情况：

$$q(z) = z^{-1} + 3z, \qquad r(z) = -4 + 2z;$$
$$q(z) = z^{-1} + 2 + 3z, \quad r(z) = -2z^{-1} - 4$$

都满足 $a(z) = b(z)q(z) + r(z)$，且

$$|q(z)| = |a(z)| - |b(z)|, \quad |r(z)| < |b(z)|.$$

利用带余除法，可以给出 Laurent 多项式的 Euclid 算法如下：

定理 6.9 (Euclid 算法) 设 $a(z)$ 和 $b(z)$ 是 Laurent 多项式，其中 $b(z) \neq 0$，且 $|a(z)| \geqslant |b(z)|$. 令 $a_0(z) = a(z)$，$b_0(z) = b(z)$，对于 $i = 0, 1, \cdots$，进行如下的迭代运算：

$$\begin{cases} a_{i+1}(z) = b_i(z), \\ b_{i+1}(z) = a_i(z)\%b_i(z), \end{cases}$$

其中 $|b_{i+1}(z)| < |b_i(z)|$，则存在整数 $n \leqslant |b(z)| + 1$，使得 $b_n(z) = 0$，$a_n(z) = \gcd(a(z), b(z))$ 为 $a(z)$ 与 $b(z)$ 的最大公因子(greatest common divisor).

若记 $q_{i+1}(z)=a_i(z)/b_i(z)$，即 $b_{i+1}(z)=a_i(z)-q_i(z)b_i(z)$，则 Euclid 算法的第 i 次迭代可用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix}a_{i+1}(z)\\b_{i+1}(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&-q_i(z)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_i(z)\\b_i(z)\end{bmatrix}.$$

于是有

$$\begin{bmatrix}a_n(z)\\0\end{bmatrix}=\prod_{i=n}^{1}\begin{bmatrix}0&1\\1&-q_i(z)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a(z)\\b(z)\end{bmatrix},$$

或者等价地有

$$\begin{bmatrix}a(z)\\b(z)\end{bmatrix}=\prod_{i=1}^{n}\begin{bmatrix}q_i(z)&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n(z)\\0\end{bmatrix}.$$

这就描述了一种由 Euclid 算法得到的关于 Laurent 多项式向量 $\begin{bmatrix}a(z)\\b(z)\end{bmatrix}$ 的提升分解.

例 6.3 设 $a(z)=a_0(z)=z^{-1}+6+z$，$b(z)=b_0(z)=4+4z$，则由第一步带余除法，可得

$$a_1(z)=4+4z,\quad b_1(z)=4,\quad q_1(z)=\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{1}{4}.$$

第二步带余除法给出

$$a_2(z)=4,\quad b_2(z)=0,\quad q_2(z)=1+z.$$

综合起来有

$$\begin{bmatrix}z^{-1}+6+z\\4+4z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{1}{4}&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+z&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}.$$

这里，Euclid 除法的步数为 $n=|b(z)|+1=2$.

6.4.3 多相位矩阵的因子分解

正如我们已经看到的，提升格式中的 Laurent 多项式 $u(z)$ 或 $v(z)$（以下称提升因子）的确定是至关重要的. Daubechies 和 Sweldens 通过研究多相位矩阵的因子分解来解决这个问题，并给出了下面的定理.

定理6.10 *如果有限滤波器的多相位矩阵 $P(z)$ 的行列式等于1，即 $\det P(z)=1$，那么必存在 Laurent 多项式 $u_i(z)$ 和 $p_i(z)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ 及非零常数 K，使得*

$$P(z)=\prod_{i=1}^{m}\begin{bmatrix}1&u_i(z)\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\p_i(z)&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K&0\\0&1/K\end{bmatrix}.\tag{6.53}$$

其中，$p_m(z)=0$.

这里我们略去定理6.10的证明，重点介绍提升因子 $u_i(z)$ 和 $p_i(z)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ 的计算方法. 我们约定，在以下的讨论中始终假设 $\det P(z)=1$.

首先，对 $H_e(z)$ 和 $H_o(z)$ 应用 Euclid 算法，可得

$$\begin{pmatrix}H_e(z)\\H_o(z)\end{pmatrix}=\prod_{i=1}^{m-1}\begin{pmatrix}1&u_i(z)\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\p_i(z)&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K\\0\end{pmatrix}.$$

记

$$P^0(z)=\begin{pmatrix}H_e(z)&G_e^0(z)\\H_o(z)&G_o^0(z)\end{pmatrix}=\prod_{i=1}^{m-1}\begin{pmatrix}1&u_i(z)\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\p_i(z)&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K&0\\0&1/K\end{pmatrix},$$

注意到

$$\begin{pmatrix}1&K^2s(z)\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K&0\\0&1/K\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}K&Ks(z)\\0&1/K\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}K&0\\0&1/K\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&s(z)\\0&1\end{pmatrix}.$$

则由式(6.53)可得，

$$P(z)=P^0(z)\begin{pmatrix}1&s(z)\\0&1\end{pmatrix},$$

其中 $s(z)=u_m(z)/K^2$. 若记

$$Q(z)=\prod_{i=1}^{m-1}\begin{pmatrix}1&u_i(z)\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\p_i(z)&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a(z)&c(z)\\b(z)&d(z)\end{pmatrix},$$

则

$$P^0(z)=Q(z)\begin{pmatrix}K&0\\0&1/K\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Ka(z)&c(z)/K\\Kb(z)&d(z)/K\end{pmatrix}.$$

于是，有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1&s(z)\\0&1\end{pmatrix}&=(P^0(z))^{-1}P(z)\\&=\begin{pmatrix}Ka(z)&c(z)/K\\Kb(z)&d(z)/K\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}H_e(z)&G_e(z)\\H_o(z)&G_o(z)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{d(z)}{K}H_e(z)-\frac{c(z)}{K}H_o(z)&\frac{d(z)}{K}G_e(z)-\frac{c(z)}{K}G_o(z)\\-Kb(z)H_e(z)+Ka(z)H_o(z)&-Kb(z)G_e(z)+Ka(z)G_o(z)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}s(z)&=\frac{d(z)G_e(z)-c(z)G_o(z)}{K}=G_o^0(z)G_e(z)-G_e^0(z)G_o(z)\\&=\begin{vmatrix}G_e(z)&G_e^0(z)\\G_o(z)&G_o^0(z)\end{vmatrix},\end{aligned}$$

$$u_m(z)=K^2s(z)=K^2\begin{vmatrix}G_e(z) & G_e^0(z)\\ G_o(z) & G_o^0(z)\end{vmatrix}.$$

归纳起来，多相位矩阵 $P(z)$ 的因子分解算法大致有以下 3 个主要步骤：

（1）利用 Euclid 算法得到：

$$\begin{pmatrix}H_e(z)\\ H_o(z)\end{pmatrix}=\prod_{i=1}^{m-1}\begin{pmatrix}1 & u_i(z)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ p_i(z) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K\\ 0\end{pmatrix};$$

（2）计算矩阵 $P^0(z)$：

$$P^0(z)=\begin{pmatrix}H_e(z) & G_e^0(z)\\ H_o(z) & G_o^0(z)\end{pmatrix}=\prod_{i=1}^{m-1}\begin{pmatrix}1 & u_i(z)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ p_i(z) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K & 0\\ 0 & 1/K\end{pmatrix};$$

（3）计算多项式 $u_m(z)$：

$$u_m(z)=K^2\begin{vmatrix}G_e(z) & G_e^0(z)\\ G_0(z) & G_o^0(z)\end{vmatrix}.$$

例 6.4 Haar 小波滤波器的多相位矩阵分解.

对于 Haar 小波，$H^*=H=\{h_0,h_1\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$，可知

$$H(z)=h_0+h_1z^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+z^{-1}),$$

$$G(z)=z^{-1}H(-z^{-1})=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}.$$

所以，Haar 小波滤波器的多相位矩阵为

$$P(z)=\begin{pmatrix}H_e(z) & G_e(z)\\ H_o(z) & G_o(z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

显然 $\det P(z)=1$.

下面求 $P(z)$ 的因子分解式. 为此，令

$$a_0(z)=H_e(z),\quad b_0(z)=H_o(z),\quad a_1(z)=b_0(z)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

则由 $a_0(z)=-1\cdot b_0(z)+\sqrt{2}$，得

$$b_1(z)=a_0(z)\%b_0(z)=\sqrt{2},$$

$$q_1(z)=a_0(z)/b_0(z)=-1,$$

$$a_2(z)=b_1(z)=\sqrt{2}.$$

因为 $a_1(z) = \frac{1}{2} \cdot b_1(z) + 0$，所以

$$b_2(z) = a_1(z) \% b_1(z) = 0, \quad q_2(z) = \frac{1}{2}, \quad K = a_2(z) = \sqrt{2}.$$

故

$$\begin{bmatrix} H_e(z) \\ H_o(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & q_1(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_2(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P^0(z) = \begin{bmatrix} H_e(z) & G_e^0(z) \\ H_o(z) & G_o^0(z) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & u_1(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p_1(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{bmatrix},$$

其中，$u_1(z) = q_1(z)$，$p_1(z) = q_2(z)$. 于是，有

$$\begin{bmatrix} G_e^0(z) \\ G_o^0(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_1(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p_1(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

所以

$$u_2(z) = K^2 \begin{vmatrix} G_e(z) & G_e^0(z) \\ G_o(z) & G_o^0(z) \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 0,$$

故 Haar 小波滤波器多相位矩阵的一个因子分解式为

$$P(z) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

6.4.4 提升格式的算法描述

现在，我们来讨论提升格式的算法问题.

给定一个长度为 $2N$ 的输入信号 $x = \{x_0, x_1, \cdots, x_{2N-1}\}$，其偶序列和奇序列信号分别记为 s^0 和 d^0，即

$$s^0 = \{x_0, x_2, \cdots, x_{2N-2}\}, \quad d^0 = \{x_1, x_3, \cdots, x_{2N-1}\}.$$

令 $I = \{0, 1, \cdots, N-1\}$ 表示指标集.

设 $\{H^*(z), G^*(z), H(z), G(z)\}$ 是有限双正交滤波器组，$P^*(z)$ 和

$P(z)$ 是对应的多相位矩阵，则由式(6.53) 及(6.48) 可知

$$P^*(z^{-1})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1/K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \prod_{i=m}^{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p_i(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -u_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.54)$$

于是，小波分解(6.51)式可以等价地用一系列上三角算子与下三角算子的依次作用来实现. 这样，问题就转化为讨论上(下)三角算子

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p_i(z) & 1 \end{pmatrix} \quad 与 \quad \begin{pmatrix} 1 & -u_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

在小波分解中的作用. 为此，记

$$\begin{pmatrix} s_i(z) \\ d_i(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p_i(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -u_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{i-1}(z) \\ d_{i-1}(z) \end{pmatrix}, \quad (6.55)$$

其中 $i = 1,2,\cdots,m$. 下面分两种情形处理.

情形 I　设 $u_1(z) \neq 0$，则由(6.55) 式可得

$$\begin{cases} s_i(z) = s_{i-1}(z) - u_i(z) d_{i-1}(z), \\ d_i(z) = d_{i-1}(z) - p_i(z) s_i(z). \end{cases} \quad (6.56)$$

将 Laurent 多项式 $u_i(z), p_i(z), s_i(z)$ 与 $d_i(z)$ 分别表示成

$$u_i(z) = \sum_k u_k^i z^{-k}, \quad p_i(z) = \sum_k p_k^i z^{-k},$$

$$s_i(z) = \sum_k s_k^i z^{-k}, \quad d_i(z) = \sum_k d_k^i z^{-k},$$

代入(6.56) 式并比较两边的系数，得

$$\begin{cases} s_l^i = s_l^{i-1} - \sum_k u_k^i d_{l-k}^{i-1}, \\ d_l^i = d_l^{i-1} - \sum_k p_k^i s_{l-k}^i, \end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,m. \quad (6.57)$$

综合上述，我们可以归纳出正向小波变换的提升算法如下：

算法 LS1　正变换算法

步骤 1　Lazy 小波变换

$$\begin{cases} s_l^0 = x_{2l}, \\ d_l^0 = x_{2l+1}, \end{cases} \quad \forall\, l \in I.$$

步骤 2　提升与对偶提升

$$\begin{cases} \text{for } i = 1 \text{ to } m \\ \quad s_l^i = s_l^{i-1} - \sum_k u_k^i d_{l-k}^{i-1} \\ \quad d_l^i = d_l^{i-1} - \sum_k p_k^i s_{l-k}^i \\ \text{end} \end{cases} \quad \forall\, l \in I.$$

步骤 3 伸缩变换

$$\begin{cases}\text{for } l=0 \text{ to } N-1\\ \quad s_l = s_l^m/K\\ \quad d_l = Kd_l^m\\ \text{end}\end{cases}$$

最后得到的

$$s=\{s_0,s_1,\cdots,s_{N-1}\} \quad \text{和} \quad d=\{d_0,d_1,\cdots,d_{N-1}\},$$

即为信号 x 经过提升小波分解后的低频分量和高频分量.

为了实现小波逆变换(6.52)，只需将正变换算法按相反的次序操作，并改变相应的正负号，即可得到提升变换的逆变换算法.

算法 LS1* 逆变换算法

步骤 1 伸缩变换

$$\begin{cases}\text{for } l=0 \text{ to } N-1\\ \quad s_l^m = Ks_l\\ \quad d_l^m = d_l/K\\ \text{end}\end{cases}$$

步骤 2 提升与对偶提升

$$\begin{cases}\text{for } i=m \text{ to } 1\\ \quad d_l^{i-1} = d_l^i + \sum_k p_k^i s_{l-k}^i\\ \quad s_l^{i-1} = s_l^i + \sum_k u_k^i d_{l-k}^{i-1}\\ \text{end}\end{cases} \quad \forall\, l \in I.$$

步骤 3 Lazy 小波逆变换

$$\begin{cases}x_{2l} = s_l^0,\\ x_{2l+1} = d_l^0,\end{cases} \quad \forall\, l \in I.$$

最后将$\{x_{2l}\}$与$\{x_{2l+1}\}$合并即得重构信号 $x=\{x_n\}$.

情形 Ⅱ 设 $u_1(z)=0$. 此时注意到 $p_m(z)=0$，则(6.54)式可改写为

$$P^*(z^{-1})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix}1/K & 0\\ 0 & K\end{pmatrix}\prod_{i=n}^{1}\begin{pmatrix}1 & -v_i(z)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -p_i(z) & 1\end{pmatrix}, \quad (6.58)$$

其中，$n=m-1$，而 $v_i(z)=u_{i+1}(z)$，$i=1,2,\cdots,n$. 相应地，(6.55)式调整为

$$\begin{pmatrix} s_i(z) \\ d_i(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v_i(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p_i(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{i-1}(z) \\ d_{i-1}(z) \end{pmatrix},$$

于是有

$$\begin{cases} d_i(z) = d_{i-1}(z) - p_i(z)s_{i-1}(z), \\ s_i(z) = s_{i-1}(z) - v_i(z)d_i(z). \end{cases} \tag{6.59}$$

与情形 I 完全类似，上式可用序列的卷积运算表示为

$$\begin{cases} d_l^i = d_l^{i-1} - (p^i * s^{i-1})_l = d_l^{i-1} - \sum_k p_k^i s_{l-k}^{i-1}, \\ s_l^i = s_l^{i-1} - (v^i * d^i)_l = s_l^{i-1} - \sum_k v_k^i d_{l-k}^i, \end{cases} \tag{6.60}$$

其中，$s^i = \{s_l^i\}$，$d^i = \{d_l^i\}$，$v^i = \{v_k^i\}$ 及 $p^i = \{p_k^i\}$ 分别是 Laurent 多项式 $s_i(z), d_i(z), v_i(z)$ 与 $p_i(z)$ 的系数所构成的序列($i = 1, 2, \cdots, n$).

因此，当 $u_1(z) = 0$ 时小波变换的提升实现算法如下：

算法 LS2 正变换算法

步骤 1 Lazy 小波变换

$$\begin{cases} s_l^0 = x_{2l}, \\ d_l^0 = x_{2l+1}, \end{cases} \quad \forall\, l \in I.$$

步骤 2 提升与对偶提升

$$\begin{cases} \text{for } i = 1 \text{ to } n \\ \quad d_l^i = d_l^{i-1} - \sum_k p_k^i s_{l-k}^{i-1} \\ \quad s_l^i = s_l^{i-1} - \sum_k v_k^i d_{l-k}^i \\ \text{end} \end{cases} \quad \forall\, l \in I.$$

步骤 3 伸缩变换

$$\begin{cases} \text{for } l = 0 \text{ to } N-1 \\ \quad s_l = s_l^n / K \\ \quad d_l = K d_l^n \\ \text{end} \end{cases}$$

最后得到的

$$s = \{s_0, s_1, \cdots, s_{N-1}\}, \quad d = \{d_0, d_1, \cdots, d_{N-1}\},$$

即为信号 x 经过提升小波分解后的低频分量和高频分量.

算法 LS2* 逆变换算法

步骤 1 伸缩变换

$$\begin{cases} \text{for } l = 0 \text{ to } N-1 \\ \quad s_l^n = Ks_l \\ \quad d_l^n = d_l/K \\ \text{end} \end{cases}$$

步骤 2 提升与对偶提升

$$\begin{cases} \text{for } i = n \text{ to } 1 \\ \quad s_l^{i-1} = s_l^i + \sum_k v_k^i d_{l-k}^i \\ \quad d_l^{i-1} = d_l^i + \sum_k p_k^i s_{l-k}^{i-1} \\ \text{end} \end{cases} \quad \forall l \in I.$$

步骤 3 Lazy 小波逆变换

$$\begin{cases} x_{21} = s_l^0, \\ x_{2l+1} = d_l^0. \end{cases} \quad \forall l \in I.$$

通过对算法 LS2 的分析我们看到，整个提升过程主要由分裂(split)、预测(predict) 和更新(update) 三步组成. 首先将输入信号$\{x_n\}$分裂为偶序列$\{x_{2n}\}$和奇序列$\{x_{2n+1}\}$，即 Lazy 小波变换. 这可经过直接下采样和移位下采样实现. 然后用偶序列$\{x_{2n}\}$预测奇序列得到$\{x'_{2n+1}\}$，x'_{2n+1}与x_{2n+1}之差y_{2n+1}作为信号的高频分量，即提升为$y_{2n+1} = x_{2n+1} - P(x_{2n})$. 再利用预测误差更新偶序列得到低频分量$y_{2n}$，即$y_{2n} = x_{2n} + U(y_{2n+1})$. 这个过程对应于对偶提升. 为了提高算法性能，通常需要进行多次预测和更新. 最后再经过一个尺度因子K的作用即伸缩变换最终获得低频分量和高频分量. 这就实现了信号的一级小波变换. 如图 6-3 所示. 其中 P 和 U 分别表示预测算子和更新算子.

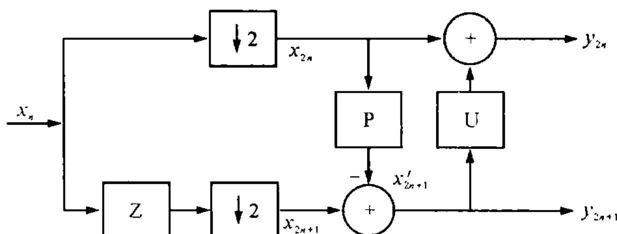


图 6-3 提升方法实现小波分解

同理，算法 LS2* 作为算法 LS2 的逆运算，与上述步骤恰好相反，即提升格式的逆变换，如图 6-4 所示，其中 M 表示合并奇偶序列的线性算子.

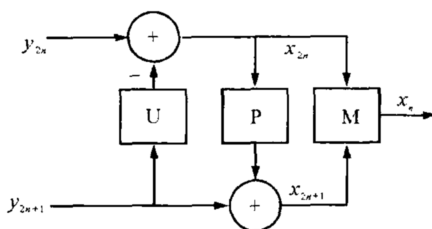


图 6-4 提升方法实现小波重构

对于算法 LS1，预测过程是由奇序列预测偶序列，其他过程与算法 LS2 基本相同.

例 6.5 DB5/3 小波变换的提升实现

对于 Daubechies 的 5/3 双正交对称小波，滤波器为

$$H^* = \left\{-\frac{1}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{4\sqrt{2}}\right\},$$

$$H = \left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}.$$

经过具体计算，可以求出 DB5/3 小波滤波器的对偶多相位矩阵的一种因子分解式为

$$P^*(z) = \begin{pmatrix} 1 & \tau(1+z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \nu(1+z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & 1/\omega \end{pmatrix},$$

其中，$\tau=-0.5$，$\nu=0.25$，$\omega=\sqrt{2}$. 由于

$$P^*(z^{-1})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & 1/\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \nu(1+z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tau(1+z) & 1 \end{pmatrix}$$

具有形如式(6.58) 的分解结构，故应采用算法 LS2. 因此 DB5/3 小波变换的提升算法为

$$\begin{cases} s_l^0 = x_{2l}, \quad d_l^0 = x_{2l+1}, \\ d_l^1 = d_l^0 + \tau(s_l^0 + s_{l+1}^0), \\ s_l^1 = s_l^0 + \nu(d_l^1 + d_{l-1}^1), \\ s_l = \omega s_l^1, \quad d_l = d_l^1/\omega. \end{cases} \tag{6.61}$$

相应地，DB5/3 小波逆变换的提升算法为

$$\begin{cases} s_l^1 = s_l/\omega, \quad d_l^1 = \omega d_1, \\ s_l^0 = s_l^1 - \nu(d_l^1 + d_{l-1}^1), \\ d_l^0 = d_l^1 - \tau(s_l^0 + s_{l+1}^0), \\ x_{2l} = s_l^0, \quad x_{2l+1} = d_l^0. \end{cases} \tag{6.62}$$

在具体应用中，有些多相位矩阵的因子分解式既可处理成形如(6.54)的结构，也可处理成形如(6.58)的结构，所以采用算法 LS1 与 LS2 都可以.

例 6.6 DB4 小波变换的提升实现

DB4 小波即 Daubechies 正交小波(见例4.1)，具有2阶消失矩，紧支集长度为4，其滤波器为

$$H(z)=h_0+h_1z^{-1}+h_2z^{-2}+h_3z^{-3},$$

$$G(z)=-h_3z^2+h_2z^1-h_1+h_0z^{-1},$$

其中(注意区别(4.11)式)

$$h_0=\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},\quad h_1=\frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},\quad h_2=\frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},\quad h_3=\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$$

经过计算可得，多相位矩阵的一种因子分解式为

$$P(z)=P^*(z)=\begin{pmatrix} h_0+h_2z^{-1} & -h_3z^1-h_1 \\ h_1+h_3z^{-1} & h_2z^1+h_0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}-2}{4}z^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & \frac{1}{K} \end{pmatrix},$$

其中 $K=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$.

方法一　将上式作为 $P(z)$ 的因子分解，根据(6.48)式可得

$$P^*(z^{-1})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} \frac{1}{K} & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}-2}{4}z^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

故采用算法 LS1. 此时，DB4 小波变换的提升实现算法为

$$\begin{cases} s_l^0=x_{2l}, \quad d_l^0=x_{2l+1}, \\ s_l^1=s_l^0+\sqrt{3}d_l^0, \\ d_l^1=d_l^0-\frac{\sqrt{3}}{4}s_l^1-\frac{\sqrt{3}-2}{4}s_{l-1}^1, \\ s_l^2=s_l^1-d_{l+1}^l, \\ s_1=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}s_l^2, \quad d_1=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}d_l^2. \end{cases}$$

方法二　作为 $P^*(z)$ 的分解式，有

$$P^*(z^{-1})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & \frac{1}{K} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}-2}{4}z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

因此，根据算法 LS2，DB4 小波变换的提升实现算法为

$$\begin{cases} s_l^0 = x_{2l}, \quad d_l^0 = x_{2l+1}, \\ d_l^1 = d_l^0 - \sqrt{3}s_l^0, \\ s_l^1 = s_l^0 + \dfrac{\sqrt{3}}{4}d_l^1 + \dfrac{\sqrt{3}-2}{4}d_{l+1}^1, \\ d_l^2 = d_l^1 + s_{l-1}^1, \\ s_l = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}s_l^1, \quad d_l = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}d_l^2. \end{cases}$$

需要指出的是，上述小波变换提升步骤序列主要依赖于多相位矩阵的因子分解式(6.53)，但这种分解并不是唯一的，至于到底存在多少种分解方法？如何求出所有的分解式？能否根据具体的应用选择一种“好”的分解方法？这些问题都尚待进一步研究.

6.4.5 整数小波变换

小波变换在图像压缩中具有重要的应用. 在许多情况下，由于滤波器具有浮点数系数，即使输入的图像数据是由整数组成的，但滤波后的数据也不再为整数. 然而，对于无损编码，人们希望经过小波变换后的小波系数仍为整数. 小波变换的提升格式可以满足这一要求. 事实上，只需在上一段介绍的提升算法中将取整算子$\lfloor a + \frac{1}{2} \rfloor$作用于每个提升步骤中的算子 $u_i(z)$ 和 $p_i(z)$，即可实现从整数到整数的小波变换. 这里，$\lfloor a \rfloor$表示不超过 a 的最大整数，即

$$\lfloor a \rfloor = \max\{n \in \mathbf{Z} \mid n \leqslant a\}.$$

由于算子“$\lfloor , \rfloor$”是非线性的，所以，整数小波变换是非线性变换.

例 6.7 整数 DB5/3 小波变换

根据例 6.6 的计算结果可知，正变换算法为

$$\begin{cases} s_l^0 = x_{2l}, \quad d_l^0 = x_{2l+1}, \\ d_l^1 = d_l^0 + \left\lfloor \tau(s_l^0 + s_{l+1}^0) + \dfrac{1}{2} \right\rfloor, \\ s_l^1 = s_l^0 + \left\lfloor \nu(d_l^1 + d_{l-1}^1) + \dfrac{1}{2} \right\rfloor, \\ s_l = \omega s_l^1, \quad d_l = d_l^1/\omega. \end{cases}$$

逆变换算法为

$$\begin{cases} s_l^1 = s_l/\omega, \quad d_l^1 = \omega d_1, \\ s_l^0 = s_l^1 - \lfloor \nu(d_l^1 + d_{l-1}^1) + \dfrac{1}{2} \rfloor, \\ d_l^0 = d_l^1 - \lfloor \tau(s_l^0 + s_{l+1}^0) + \dfrac{1}{2} \rfloor, \\ x_{2l} = s_l^0, \quad x_{2l+1} = d_l^0. \end{cases}$$

例 6.8 整数 DB9/7 双正交小波变换

DB9/7 小波即 Daubechies 对称双正交小波，广泛应用于图像压缩中. 分析滤波器 H^* 的长度为 9，综合滤波器 H 的长度为 7，两个高通滤波器 G^* 和 G 都具有 4 阶消失矩. 之所以选择长度为 7 的滤波器作为综合滤波器，是因为它对应的尺度函数比长度为 9 的滤波器对应的尺度函数更光滑. 此时有

$$H_e^*(z) = h_4^*(z^2 + z^{-2}) + h_2^*(z^1 + z^{-1}) + h_0^*,$$

$$H_o^*(z) = h_3^*(z^2 + z^{-1}) + h_1^*(z + 1).$$

利用 Euclid 算法，可求得多相位矩阵 $P^*(z)$ 的一个因子分解式为

$$P^*(z) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha(1+z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta(1+z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma(1+z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta(1+z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1/\xi \end{pmatrix},$$

其中，

$$\alpha = \frac{h_4^*}{h_3^*}, \quad \beta = \frac{h_3^*}{r_1}, \quad \gamma = \frac{r_1}{s_0}, \quad \delta = \frac{s_0}{t_0}, \quad \xi = t_0,$$

$$r_0 = h_0^* - \frac{2h_1^* h_4^*}{h_3^*},$$

$$r_1 = h_2^* - h_4^* - \frac{h_1^* h_4^*}{h_3^*},$$

$$s_0 = h_1^* - h_3^* - \frac{h_3^* r_0}{r_1},$$

$$t_0 = r_0 - 2r_1.$$

所以，由式(6.62)可得

$$P(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha(1+z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\beta(1+z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma(1+z) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\delta(1+z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\xi & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}$$

根据算法 LS2，整数 DB9/7 小波变换的正变换算法为

$$\begin{cases} s_l^0 = x_{2l}, \quad d_l^0 = x_{2l+1}, \\ d_l^1 = d_l^0 + \lfloor \alpha(s_l^0 + s_{l+1}^0) + \dfrac{1}{2} \rfloor, \\ s_l^1 = s_l^0 + \lfloor \beta(d_l^1 + d_{l-1}^1) + \dfrac{1}{2} \rfloor, \\ d_l^2 = d_l^1 + \lfloor \gamma(s_l^1 + s_{l+1}^1) + \dfrac{1}{2} \rfloor, \\ s_l^2 = s_l^1 + \lfloor \delta(d_1^2 + d_{l-1}^2) + \dfrac{1}{2} \rfloor, \\ s_l = \xi s_l^2, \quad d_1 = d_l^2/\xi. \end{cases}$$

请读者给出相应的逆变换算法.

6.5 正交小波包

正交小波包(Wavelet Packets)的概念是正交小波基的推广与发展，它是由 Coifman, Meyer, Wickerhauser 于 1989 年引入的. 小波算法的特点是把一个离散信号 c^{j+1} 分解为逼近信号 c^j 和细节信号 d^j，保留 d^j 不动而再分解 c^j 为 c^{j-1} 和 d^{j-1}，然后又分解 c^{j-1}…… 最后得到原始信号的小波系数. 正交小波包则是把 c^j 和 d^j 同等对待，都进行分解，这样就可以得到信号 c^{j+1} 在很多基下的表示. 这些基构成一个正交基库，由此可以很方便地确定信号的最优表示.

6.5.1 为什么要引进正交小波包

对于正交小波 $\psi(t)$，其二进伸缩与整数平移 $\{\psi_{jk}(t),\ j,k \in \mathbf{Z}\}$ 构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个标准正交基，$L^2(\mathbf{R})$ 中的任一函数 $f(t)$ 都可以展开为一个小波级数

$$f(t) = \sum_{j,k\in\mathbf{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}(t),$$

如果 $\psi_{jk}(t)$ 有很好的局部性，那么级数中的某几项就可以反映 $f(t)$ 在某局部时段的性质，$\psi_{jk}(t)$ 的局部性越好，对 $f(t)$ 的时域分辨率越高.

我们知道，刻画 $\psi_{jk}(t)$ 的局部性的是其窗口半径 $\dfrac{1}{2^j}\Delta_\psi$，由两个因素确定，一个是 Δ_ψ 的大小，由小波母函数 $\psi(t)$ 决定. 另一个因素是尺度参数 j $(-\infty < j < +\infty)$，随着 j 的增大，$\psi_{jk}(t)$ 的窗口半径相应减小，分辨率提

高，但频谱 $\hat{\psi}_{jk}(\omega)$ 的窗口半径 $2^j\Delta_{\hat{\psi}}$ 却增大，因此时域分辨率的提高，必然导致频域分辨率的降低. 为了解决这个矛盾，Coifman 等人引入了正交小波包的概念，以便把随着 j 的增大而变宽的频谱窗口再进一步分割变细，从而在提高时域分辨率的同时，又能提高频域分辨率.

正交小波包的基本思想是：首先根据前面几章所阐述的理论，把 $L^2(\mathbf{R})$ 分解为小波子空间 W_j 的直和 $L^2(\mathbf{R})=\bigoplus\limits_{j\in\mathbf{Z}}W_j$，而 $\{\psi_{jk}(t),\ k\in\mathbf{Z}\}$ 就是 W_j 的标准正交基. 为了避免频谱窗口随 j 的增大而变宽，导致频域分辨率的降低，我们对较大的 j 所对应的子空间 $W_j(j\geqslant 1)$ 再进一步作正交分解为 $W_j=\bigoplus\limits_{n\in\mathbf{Z}}U_j^n$. 因此，如何构造子空间 U_j^n 则是解决问题的关键.

6.5.2 正交小波包的定义与性质

设 $\{V_j\}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 OMRA，$\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 分别是相应的正交尺度函数与正交小波. 为了讨论问题方便起见，现将前面所采用的记号作一些改变：

$$\varphi(t)\xrightarrow{\text{改记为}}\mu_0(t),\quad \psi(t)\xrightarrow{\text{改记为}}\mu_1(t),\tag{6.63}$$

并将双尺度方程中的系数 h_k 改记为 p_k，把 g_k 改记为 q_k，则

$$q_k=(-1)^k\overline{p}_{1-k},\tag{6.64}$$

于是原来关于 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 的双尺度方程(3.35)与(3.36)用现在的记号就是

$$\begin{cases}\mu_0(t)=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}p_k\mu_0(2t-k),\\ \mu_1(t)=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}q_k\mu_0(2t-k).\end{cases}\tag{6.65}$$

为方便起见，记

$$\begin{cases}P_0(z)=P(z)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}p_kz^k,\\ P_1(z)=Q(z)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}q_kz^k.\end{cases}\tag{6.66}$$

对(6.65)式两边作 Fourier 变换，并利用公式(6.66)得

$$\begin{cases}\hat{\mu}_0(\omega)=P_0(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})\hat{\mu}_0\left(\dfrac{\omega}{2}\right),\\ \hat{\mu}_1(\omega)=P_1(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})\hat{\mu}_0\left(\dfrac{\omega}{2}\right).\end{cases}\tag{6.67}$$

定义 6.1 设 $\{V_j\}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 OMRA，而 $\mu_0(t)$ 是相应的正交尺度函数，定义函数列 $\mu_n(t)$ 如下：

$$\begin{cases}\mu_{2l}(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} p_k\mu_l(2t-k),\\ \mu_{2l+1}(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} q_k\mu_l(2t-k).\end{cases}\tag{6.68}$$

我们称$\{\mu_n(t), n\in\mathbf{Z}^+\}$为由$\mu_0(t)$所确定的**正交小波包**，其中$\mathbf{Z}^+$表示全体非负整数构成的集合.

因此，正交小波包$\mu_n(t)$，$n=0,1,2,\cdots$实际上是正交小波母函数$\mu_1(t)=\psi(t)$的推广.

为了求出$\mu_n(t)$的 Fourier 变换$\hat{\mu}_n(\omega)$，我们将n用二进制表示为

$$n=\sum_{j=1}^{+\infty}\varepsilon_j 2^{j-1},\quad \varepsilon_j=0\text{ 或 }1.\tag{6.69}$$

定理6.11 设非负整数$n\in\mathbf{Z}^+$的二进制表示如公式(6.69)，则小波包$\mu_n(t)$的 Fourier 变换由下式给出：

$$\hat{\mu}_n(\omega)=\prod_{k=1}^{\infty}P_{\varepsilon_k}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2^k}}).\tag{6.70}$$

证 将(6.68)式两边作 Fourier 变换得

$$\begin{cases}\hat{\mu}_{2l}(\omega)=P_0(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})\hat{\mu}_l\left(\frac{\omega}{2}\right),\\ \hat{\mu}_{2l+1}(\omega)=P_1(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})\hat{\mu}_l\left(\frac{\omega}{2}\right).\end{cases}\tag{6.71}$$

我们对n作归纳法. 当$n=0,1$时，由(6.67)式知结论成立. 假定(6.70)式对一切$2\leqslant n\leqslant 2^{s_0}$为真，现设$2^{s_0}\leqslant n\leqslant 2^{s_0+1}$，则

$$n=\sum_{j=1}^{s_0+1}\varepsilon_j 2^{j-1},\text{ 且 }\frac{n}{2}=\frac{\varepsilon_1}{2}+\sum_{j=1}^{s_0}\varepsilon_{j+1}2^{j-1}.$$

以$[x]$记不超过x的最大整数，则

$$n=2\left[\frac{n}{2}\right]+\varepsilon_1,$$

因而由(6.71)式得

$$\hat{\mu}_n(\omega)=P_{\varepsilon_1}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}})\hat{\mu}_{[n/2]}\left(\frac{\omega}{2}\right).\tag{6.72}$$

而另一方面，

$$\left[\frac{n}{2}\right]=\sum_{j=1}^{s_0}\varepsilon_{j+1}2^{j-1}<2^{s_0},$$

所以由归纳假设有

$$\hat{\mu}_{[n/2]}(\omega)=\prod_{j=1}^{\infty}P_{\varepsilon_{j+1}}(e^{-i\frac{\omega}{2^j}}). \tag{6.73}$$

将(6.73)式代入(6.72)式即得(6.70)式，定理得证. ∎

下面来证 $\mu_n(t)$ 的平移正交性.

定理6.12 设$\{\mu_n(t)\}$是由OMRA中的尺度函数$\mu_0(t)$生成的正交小波包，则$\forall n\in\mathbf{Z}^+$，$\mu_n(t)$具有平移正交性，即

$$\langle\mu_n(\cdot-j),\mu_n(\cdot-k)\rangle=\delta_{jk},\quad j,k\in\mathbf{Z}. \tag{6.74}$$

证 根据定理2.6，只需证明(6.74)式的等价性条件

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\mu}_n(\omega+2k\pi)|^2\equiv 1 \tag{6.75}$$

成立即可. 对n用数学归纳法. 当$n=0$和$n=1$时结论显然成立. 现在假定(6.75)式对一切$0\leqslant n\leqslant 2l-1$成立，则当$n=2l$时，由于有$0\leqslant l\leqslant 2l-1$，所以归纳假设成立，即

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\mu}_l(\omega+2k\pi)|^2\equiv 1.$$

利用(6.71)式并注意到$P_0(e^{-i\omega})=H(\omega)$的$2\pi$周期性，有

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\mu}_{2l}(\omega+2k\pi)|^2&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left|H\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)\hat{\mu}_l\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)\right|^2\\&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left|H\left(\frac{\omega}{2}+2k\pi\right)\hat{\mu}_l\left(\frac{\omega}{2}+2k\pi\right)\right|^2\\&\quad+\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left|H\left(\frac{\omega}{2}+\pi+2k\pi\right)\hat{\mu}_l\left(\frac{\omega}{2}+\pi+2k\pi\right)\right|^2\\&=\left|H\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left|\hat{\mu}_l\left(\frac{\omega}{2}+2k\pi\right)\right|^2\\&\quad+\left|H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right|^2\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left|\hat{\mu}_l\left(\frac{\omega}{2}+\pi+2k\pi\right)\right|^2\\&=\left|H\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2+\left|H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right|^2\\&\equiv 1,\end{aligned}$$

故当$n=2l$时(6.75)式成立.

同理可证，当$n=2l+1$时(6.75)式也成立. 因此，(6.75)式对一切$n\in\mathbf{Z}^+$成立. ∎

在正交小波包$\{\mu_n(t)\}$中，函数$\mu_{2l}(t)$与$\mu_{2l+1}(t)$之间也有类似于$\varphi(t)$与$\psi(t)$之间的正交关系，我们有以下定理：

定理6.13 设$\{\mu_n(t)\}$是由OMRA中的尺度函数$\mu_0(t)$生成的正交小波包，则$\forall l\in \mathbf{Z}^+$，$\mu_{2l}(t)$与$\mu_{2l+1}(t)$具有下列正交关系：

$$\langle \mu_{2l}(\cdot-j),\mu_{2l+1}(\cdot-k)\rangle = 0,\quad j,k\in\mathbf{Z}. \tag{6.76}$$

证 首先注意到$P_0(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})=H(\omega)$，$P_1(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})=G(\omega)$，且

$$H(\omega)\overline{G(\omega)}+H(\omega+\pi)\overline{G(\omega+\pi)}=0. \tag{6.77}$$

利用Parseval等式，(6.71)，(6.75)及(6.77)式，可得

$$\begin{aligned}
&\langle \mu_{2l}(\cdot-j),\mu_{2l+1}(\cdot-k)\rangle\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\mu}_{2l}(\omega)\,\overline{\hat{\mu}_{2l+1}(\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-j)\omega}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{\mu}_l\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2H\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{G\left(\frac{\omega}{2}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-j)\omega}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{4\pi}\sum_{m\in\mathbf{Z}}\left|\hat{\mu}_l\left(\frac{\omega}{2}+2m\pi\right)\right|^2H\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{G\left(\frac{\omega}{2}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-j)\omega}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{4\pi}H\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{G\left(\frac{\omega}{2}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-j)\omega}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left(H\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{G\left(\frac{\omega}{2}\right)}+H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\overline{G\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-j)\omega}\mathrm{d}\omega\\
&=0.
\end{aligned}$$

■

6.5.3 小波子空间的精细分解

我们知道，由$\varphi(t)$及$\psi(t)$的伸缩及平移生成的$L^2(\mathbf{R})$的子空间

$$\begin{cases}V_j=\overline{\operatorname{span}}\{2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^jt-k),\ k\in\mathbf{Z}\},\\ W_j=\overline{\operatorname{span}}\{2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jt-k),\ k\in\mathbf{Z}\}\end{cases}$$

具有性质

$$V_j\perp W_j,\quad V_{j+1}=V_j\oplus W_j, \tag{6.78}$$

并且子空间列$\{W_j\}$构成$L^2(\mathbf{R})$的一个正交分解

$$L^2(\mathbf{R})=\bigoplus_{j\in\mathbf{Z}}W_j. \tag{6.79}$$

现在我们要将性质(6.78)推广到正交小波包. 令

$$U_j^n=\overline{\operatorname{span}}\{2^{\frac{j}{2}}\mu_n(2^jt-k),\ k\in\mathbf{Z}\},\quad n\in\mathbf{Z}^+,\ j\in\mathbf{Z}, \tag{6.80}$$

由于

$$V_j=U_j^0,\ W_j=U_j^1,\quad j\in\mathbf{Z}, \tag{6.81}$$

所以(6.78)式可写成

$$U_j^0 \perp U_j^1, \quad U_{j+1}^0 = U_j^0 \oplus U_j^1. \tag{6.82}$$

这一关系式可推广为下面的定理.

定理6.14 若 $n \in \mathbf{Z}^+$ 为非负整数，则有

$$U_j^{2n} \perp U_j^{2n+1}, U_{j+1}^n = U_j^{2n} \oplus U_j^{2n+1}, \quad j \in \mathbf{Z} \tag{6.83}$$

证 由(6.68)及(6.80)式易知U_j^{2n}与U_j^{2n+1}是U_{j+1}^n的子空间，又由定理6.13知这两个子空间相互正交，所以要证明(6.83)式，只需要证明：

$$\mu_n(2^{j+1}t-m) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}(\bar{p}_{m-2k}\mu_{2n}(2^jt-k)+\bar{q}_{m-2k}\mu_{2n+1}(2^jt-k)). \tag{6.84}$$

对于一切$m \in \mathbf{Z}$成立. 为此利用(6.68)式，即可将(6.84)右方写成：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\sum_{l\in\mathbf{Z}}(\bar{p}_{m-2k}p_l+\bar{q}_{m-2k}q_l)\mu_n(2^{j+1}t-2k-l)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\sum_{s\in\mathbf{Z}}(\bar{p}_{m-2k}p_{s-2k}+\bar{q}_{m-2k}q_{s-2k})\mu_n(2^{j+1}t-s)\\
&=\sum_{s\in\mathbf{Z}}\Big[\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}(\bar{p}_{m-2k}p_{s-2k}+\bar{q}_{m-2k}q_{s-2k})\Big]\mu_n(2^{j+1}t-s)\\
&=\sum_{s\in\mathbf{Z}}\delta_{sm}\mu_n(2^{j+1}t-s)=\mu_n(2^{j+1}t-m).
\end{aligned}$$

这里利用了(6.64)与(3.18)式. ∎

正如我们在本节第一段已经指出的，正交小波的缺陷是不能同时提高时域分辨率与频域分辨率，而小波包在一些要求在空间及频率域上均有较好局部性的问题中能发挥很好的作用. 下面的定理阐明了小波包的这一优良性质.

定理6.15 对于$j = 2,3,\cdots$有

$$\begin{aligned}
W_j &= U_{j-1}^2 \oplus U_{j-1}^3,\\
W_j &= U_{j-2}^4 \oplus U_{j-2}^5 \oplus U_{j-2}^6 \oplus U_{j-2}^7,\\
&\cdots,\\
W_j &= U_{j-k}^{2^k} \oplus U_{j-k}^{2^k+1} \oplus \cdots \oplus U_{j-k}^{2^{k+1}-1},\\
&\cdots,\\
W_j &= U_0^{2^j} \oplus U_0^{2^j+1} \oplus \cdots \oplus U_0^{2^{j+1}-1}.
\end{aligned} \tag{6.85}$$

且对取定的$m = 0,1,2,\cdots,2^k-1$, $k = 1,2,\cdots,j$及$j = 1,2,\cdots$，函数系

$$\{2^{\frac{j-k}{2}}\mu_{2^k+m}(2^{j-k}t-l), \quad l \in \mathbf{Z}\} \tag{6.86}$$

是子空间$U_{j-k}^{2^k+m}$的标准正交基.

证 在定理 6.14 中，先令 $n=1$，并注意到 $U_j^1=W_j$，即得

$$W_j=U_{j-1}^2\oplus U_{j-1}^3,\tag{6.87}$$

再在(6.83)式中令 $n=2,3$ 代入上式即得

$$W_j=U_{j-2}^4\oplus U_{j-2}^5\oplus U_{j-2}^6\oplus U_{j-2}^7,$$

如此反复利用(6.83)式即得(6.85)式. 由(6.74),(6.80)式即知函数系(6.86)是 $U_{j-k}^{2^k+m}$ 的标准正交基. ∎

实质上，定理 6.15 给出了小波子空间 W_j 在不同尺度上的精细分解. 对于小波分量 $g_j(t)\in W_j$，按正交小波基展开，有

$$g_j(t)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}d_n^j\psi(2^jt-n)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}d_n^j\mu_1(2^jt-n).\tag{6.88}$$

根据(6.85)中的分解式 $W_j=U_{j-k}^{2^k}\oplus U_{j-k}^{2^k+1}\oplus\cdots\oplus U_{j-k}^{2^{k+1}-1}$，又可以把 $g_j(t)$ 分解为 2^k 个小波包分量：

$$g_{jkm}(t)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}d_n^{jkm}\mu_{2^k+m}(2^{j-k}t-n),\quad m=0,1,\cdots,2^k-1.\tag{6.89}$$

类似地，可以给出正交小波包的分解与重构算法.

设 $g_j^n(t)\in U_j^n$ 是 $f(t)$ 在 U_j^n 上的投影，则 $g_j^n(t)$ 可表示为

$$g_j^n(t)=2^{\frac{j}{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_{jk}^n\mu_n(2^jt-k),$$

其中 $d_{jk}^n=\langle f(t),2^{\frac{j}{2}}\mu_n(2^jt-k)\rangle$ 称为 $f(t)$ 的小波包系数. 由此可得小波包分解算法为

$$\begin{cases}d_{jk}^{2n}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{l\in\mathbf{Z}}\overline{p}_{l-2k}d_{j+1,l}^n,\\ d_{jk}^{2n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{l\in\mathbf{Z}}\overline{q}_{l-2k}d_{j+1,l}^n;\end{cases}\tag{6.90}$$

重构算法为

$$d_{j+1,k}^n=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{l\in\mathbf{Z}}(p_{k-2l}d_{jl}^{2n}+q_{k-2l}d_{jl}^{2n+1}).\tag{6.91}$$

6.5.4 最优小波基的搜索算法

在实际应用中，给定信号 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，假设经过某种近似(如采样、量化)后可用某个逼近子空间 V_J(记为 U_J^0)中的函数 $f_J(t)$ 近似代替. 现在，如果我们考虑 U_J^0 的小波包分解，那么将面临一个抉择问题. 我们以 $J=3$ 为例，如图 6-5 所示. 显然，$\{U_2^0,U_1^2,U_0^6,U_0^7\}$，$\{U_0^0,U_0^1,U_0^2,U_0^3,U_0^4,U_0^5,U_0^6,U_0^7\}$，$\{U_1^1,U_1^3,U_0^0,U_0^1,U_0^4,U_0^5\}$，$\{U_2^1,U_0^0,U_0^1,U_0^2,U_0^3\}$ 都构成 U_3^0 的一个正交分解，那么不同的分解之间是否存在优劣问题？究竟选择哪一种分解比较合适呢？这正是我们在

下面将要阐述的问题.

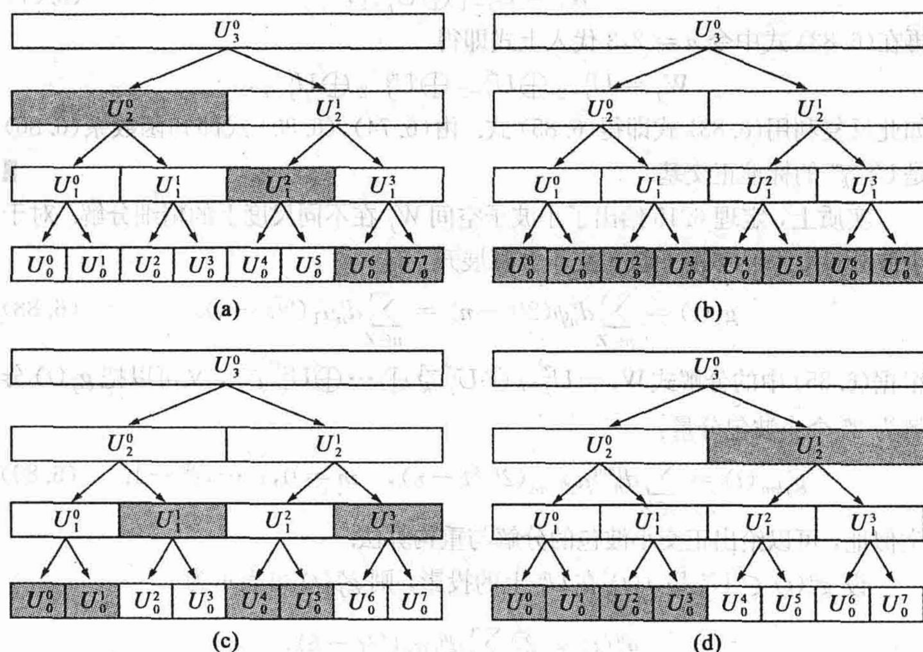


图 6-5 V_3 的几种互不相同的正交分解

我们知道，$\{2^{\frac{j}{2}}\mu_1(2^jt-k),\ j,k\in\mathbf{Z}\}$ 构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个标准正交基，即 Mallat 正交小波基. 此外，如果将每个 W_j，$j=1,2,\cdots$ 按式(6.85) 中的最后一个表达式分解并代入式(6.79)，则有

$$L^2(\mathbf{R})=\cdots\oplus W_{-1}\oplus W_0\oplus U_0^2\oplus U_0^3\oplus\cdots\oplus U_0^7\oplus\cdots.$$

因此，函数系

$$\{\psi_{jk}(t),\mu_n(t-k),\ j\leqslant 0,\ n\geqslant 2,\ k\in\mathbf{Z}\}\tag{6.92}$$

也构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个标准正交基. 显然，将(6.85) 式中 W_j 的不同表达式代入(6.79)，还可得到 $L^2(\mathbf{R})$ 的另外的标准正交基. 由此可知，借助于小波子空间的更精细分解可以构造出 $L^2(\mathbf{R})$ 的许多标准正交基，并且都由函数系

$$\{2^{\frac{j}{2}}\mu_n(2^jt-k),\ n\in\mathbf{Z}^+,\ j,k\in\mathbf{Z}\}\tag{6.93}$$

的子函数系构成.

定义 6.2 称函数系(6.93) 是由正交尺度函数 $\varphi(t)$ 导出的**小波基库**. 把从小波基库中抽取的 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个标准正交基称为 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个**小波包基**.

根据这个定义，Mallat 正交小波基以及函数系(6.92) 都是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个小波包基. 所以小波包基是正交小波基的推广.

一般地，不同的小波包基具有不同的时频局部化能力，反映不同的信号特性. 因此，对于一个给定的信号，选择一个性质好的小波包基是很重要的. 那么如何选择最优小波包基呢? 为此，需要解决两个问题：一是用什么标准来评价一个基的优劣；二是如何从小波基库(6.93) 中进行快速搜索以获取最优小波基.

定义 6.3 设 $\boldsymbol{c}=\{c_k\}$ 是信号 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 在某个小波包基下的小波包系数序列. 我们称 M 为序列 $\boldsymbol{c}$ 的一个**信息代价函数**(Information Cost Function，ICF)，如果存在一个定义在区间$[0,+\infty)$上的非负连续函数ρ，使得 M 满足可加性条件

$$M(\boldsymbol{c})=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\rho(|c_k|)<+\infty,\quad \rho(0)=0.$$

可以构造各种 ICF，但最实用的应该能够度量小波包基的能量集中性，即当能量集中在序列 $\boldsymbol{c}$ 的少数几个系数上而大多数系数的绝对值很小并且可以忽略不计时，可以认为对应的基比较好，这时M的取值应该比较小. 反之，当能量分布比较均匀时，可以认为对应的基不好，这时 M 的取值应该比较大.

对于小波包系数序列 $\boldsymbol{c}=\{c_k\}$，常用的 ICF 主要有：

(1) 幅值大于某阈值的系数个数.

预先给定一个阈值 T，则 $M(\boldsymbol{c})$ 等于序列 $\boldsymbol{c}$ 中绝对值超过 T 的分量的个数，即令

$$\rho(|c_k|)=\begin{cases}1, & |c_k|\geqslant T,\\ 0, & |c_k|<T.\end{cases}$$

(2) 范数集中度.

对任意的 $0<p<2$，定义 $\rho(|c_k|)=|c_k|^p$，从而

$$M(\boldsymbol{c})=\sum_{k\in\mathbf{Z}}|c_k|^p=\|\boldsymbol{c}\|^p.$$

(3) 能量对数熵.

序列$\boldsymbol{c}$的能量对数熵，即$M(\boldsymbol{c})=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\log|c_k|^p$，当$c_k=0$时，约定$\log 0=0$.

(4) Shannon 信息熵.

序列 $\boldsymbol{c}$ 的信息熵，即 $M(\boldsymbol{c})=-\sum_{k\in\mathbf{Z}}p_k\log p_k$，其中 $p_k=\dfrac{|c_k|}{\sum_{k\in\mathbf{Z}}|c_k|^2}$，当 $p_k=0$ 时，约定 $0\log 0=0$.

另一个类似于信息熵的 ICF 为 $M(\boldsymbol{c})=-\sum_{k\in\mathbf{Z}}|c_k|^2\log|c_k|^2$，当 $c_k=0$ 时，约定 $0\log 0=0$.

关于 ICF 的更进一步讨论，读者可参考文献[103],[167].

定义 6.4 设 M 是一个给定的 ICF，如果在 $L^2(\mathbf{R})$ 的所有小波包基中，信号 $f(t)$ 在小波包基 B 下的小波包系数序列具有最小的信息代价函数值，那么称 B 是 $f(t)$ 相对于信息代价函数 M 的最优基.

一旦确定了 ICF，我们就可以求出使 ICF 最小的小波包系数序列，那么对应的小波包基就是最优基. 但在一般情况下求出这样的序列并不容易. 所幸的是，正如前面所提到的，在实际应用中我们通常考虑的是 $L^2(\mathbf{R})$ 的某个子空间 $V_J = U_J^0$ 的小波包分解，这种分解可以用一个小波包二叉树表示，如图 6-6 所示. 当一个小波基库是具有深度为 J 的二叉树时，我们可以采取自底向顶的**快速搜索法**找到最优小波包基(见文献[103]).

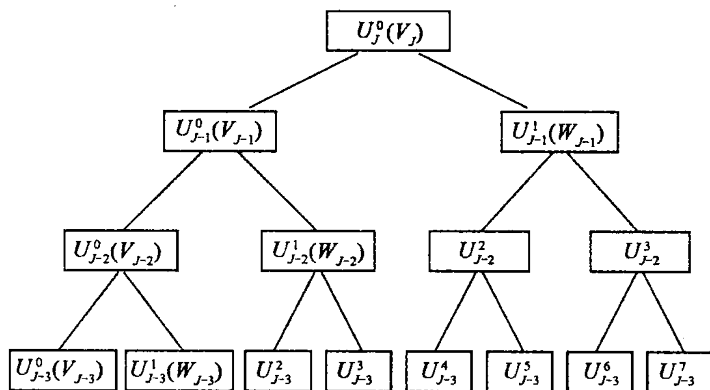


图 6-6 小波包分解结构示意图

为了便于理解，我们以三级小波包二叉树为例来说明最优基搜索的计算过程.

对于 $f(t)$，首先利用小波包快速分解算法(6.90) 计算出 $f(t)$ 在各个子空间上的小波包系数. 其次，选定ICF，计算出小波包树中各个节点处ICF的值，如图 6-7 所示.

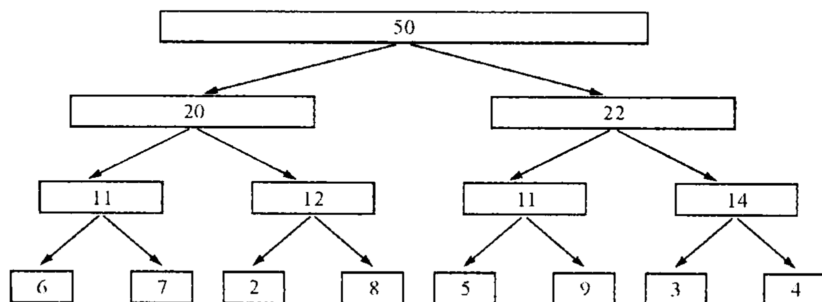
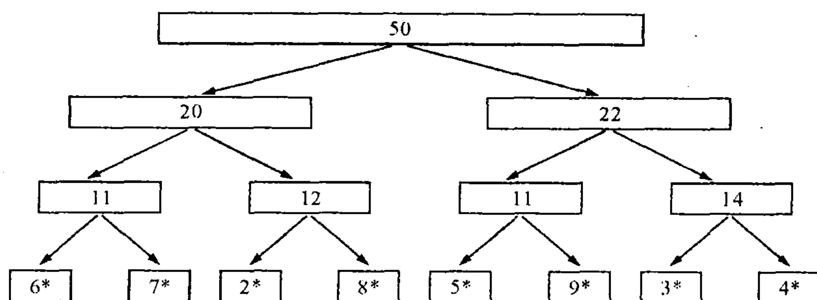


图 6-7 三级小波包树及其各节点的信息代价函数值

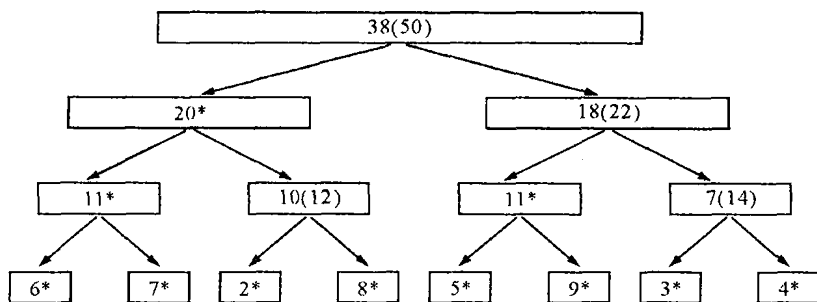
最后，采取自底向顶逐级节点比较的方法搜索最优小波包基，具体操作过程如下.

第一步　用“ * ”逐一标记最底层节点，如图 6-8 (a) 所示.

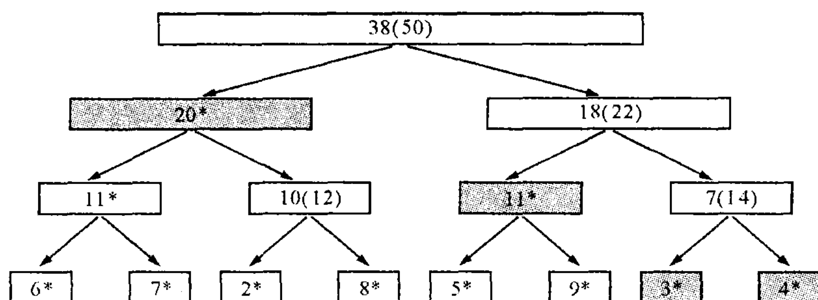
第二步　将父节点的 ICF 值与其两个子节点的 ICF 值之和进行比较. 如果父节点的 ICF 值小于其两个子节点的 ICF 值之和，则用“ * ”标记父节点. 否则，用两个子节点的 ICF 值之和代替父节点的 ICF 值，同时将父节点原来的 ICF 值用括号括起来.



(a)



(b)



(c)

图 6-8　最优基的快速搜索

第三步 只考虑括号外的值，重复第二步的操作直至最顶层，如图 6-8 (b) 所示.

第四步 从小波包树最顶层开始，从上到下选取与树根最近的标记“*”的节点(以这些节点为根的子树的节点将不再考虑)，这些被选出的标有“*”的节点构成子空间 $V_J = U_J^0$ 的互不重叠的覆盖，它们就是最优基对应的节点，如图 6-8 (c) 中的灰色框所示. 这些节点对应的小波包基就是所求的最优基.

如果原始信号的长度为 N，则最优基搜索算法的计算复杂度为 $O(N\log N)$.

顺便指出，如果小波包分解采用深度优先顺序，则最优基节点的标记过程可以在计算节点的小波包系数的同时完成. 由于小波包树具有有限深度，所以以深度优先的搜索算法可在有限步终止.

Coifman 和 Wickerhauser 还对最优基的选取进行了更深入的讨论，详见文献[41].

习 题 6

1. 设有一个支撑区间为[0,1]的信号 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，经过采样(采样间隔为$\frac{1}{4}$)，得到采样值为 1,0,2,−1. 求 $f(t)$ 的 Haar 小波变换.

2. 考虑 Haar 小波，及相应的双尺度方程

$$\varphi(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\varphi(2t-k),\quad \forall t\in\mathbf{R}.$$

(1) 写出全部滤波器系数$\{h_k\}$.

(2) 现有长度为 8 的信号 $X^3=\{c_0^3,c_1^3,\cdots,c_7^3\}$，利用 Mallat 算法，经过 3 级小波分解后的逼近系数与细节系数记为

$$X^0=\{c_0^0,d_0^0,d_0^1,d_1^1,d_0^2,d_1^2,d_2^2,d_3^2\}.$$

请给出由 X^3 变换到 X^0 以及由 X^0 重构出 X^3 的矩阵表示式.

3. 设函数 $f(t)$ 的定义如下：

$$f(t)=\begin{cases}t(1-t), & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

对 $f(t)$ 在二进点 $t=k\times 2^{-8}$, $k=-256,\cdots,512$ 上采样，利用 $N=2$ 时的 Daubechies 小波 $\psi_2(t)$ 实现一个一级分解，并画出分解后的小波系数幅值图.

4. 什么是正交小波包? 正交小波包为什么优于正交小波?

5. 对 Haar 小波进行提升，使经过提升后的小波具有三阶消失矩.

6. 定义下面两个尺度函数

$$\varphi_1(t)=\varphi_1(2t)+\varphi_1(2t-1),$$

$$\varphi_2(t)=\frac{1}{2}\big(\varphi_2(2t)+\varphi_2(2t-1)-\varphi_1(2t)+\varphi_1(2t-1)\big).$$

(1) 计算函数 $\varphi_1(t),\varphi_2(t)$.

(2) 证明：$\{\varphi_1(t-k),\varphi_2(t-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是一个标准正交系.

(3) 求支集在[0,1]上、相互正交、且与 $\varphi_1(t),\varphi_2(t)$ 都正交的函数 $\psi_1(t),\psi_2(t)$.

(4) 证明：$\psi_1(t),\psi_2(t)$ 具有 2 阶消失矩且生成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个标准正交基.

7. 设 $f(t)\in L^2[0,1]$，令 $g(t)=f(t)\chi_{[0,1]}(t)$，$f_0(t)=g(t)+g(-t)$，再令 $f^{\text{fold}}(t)=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}f_0(t-2k)$. 证明：

(1) $f^{\text{fold}}(t)$ 关于 $t=0$ 和 $t=1$ 是偶对称的；

(2) 若 $f(t)$ 是连续可微的，则 $f^{\text{fold}}(t)$ 在 $t=0$ 和 $t=1$ 处连续；但若 $f'(0)\neq 0$，$f'(1)\neq 0$，则 $f^{\text{fold}}(t)$ 的导数在 $t=0$ 和 $t=1$ 处不连续.

8. 设 $f^{\text{fold}}(t)$ 的定义如上题，$\{\psi_{jk}(t),\ j,k\in\mathbf{Z}\}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个小波基，证明：

$$\int_0^1 f(t)\psi_{jk}^{\text{fold}}(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f^{\text{fold}}(t)\psi_{jk}(t)\mathrm{d}t,\quad \forall j,k\in\mathbf{Z}.$$

9. 设 $\alpha(t),\beta(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 是关于 $t=0$ 对称或反对称的两个函数，证明：如果

$$\langle\alpha(t),\beta(t+2k)\rangle=0,\quad \langle\alpha(t),\beta(2k-t)\rangle=0,\quad \forall k\in\mathbf{Z},$$

那么 $\int_0^1\alpha^{\text{fold}}(t)\beta^{\text{fold}}(t)\mathrm{d}t=0$.

10. 求证：如果 $\varphi(t),\psi(t),\tilde{\varphi}(t),\tilde{\psi}(t)$ 关于 $t=0$ 或 $t=\frac{1}{2}$ 对称或反对称，且生成 $L^2(\mathbf{R})$ 的双正交基，那么，对于 $J\leqslant 0$，

$$\{\varphi_{Jk}^{\text{fold}}(t),\ 0\leqslant k<2^{-J}\},\ \{\psi_{jk}^{\text{fold}}(t),\ -\infty<j\leqslant J,\ 0\leqslant k<2^{-J}\}$$

与

$$\{\tilde{\varphi}_{Jk}^{\text{fold}}(t),\ 0\leqslant k<2^{-J}\},\ \{\tilde{\psi}_{jk}^{\text{fold}}(t),\ -\infty<j\leqslant J,\ 0\leqslant k<2^{-J}\}$$

构成 $L^2[0,1]$ 的双正交基.

11. 将 Lazy 小波提升为

$$H(\omega)=-\frac{1}{16}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\omega}+\frac{9}{16}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}+1+\frac{9}{16}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}-\frac{1}{16}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\omega}.$$

12. 续上题. 求一个对偶提升，由此构造一个支集长度为 9 且在 π 处具有 2 重零点的提升滤波器. 计算相应的提升小波和尺度函数.

第七章　正交多小波

迄今，我们讨论了多分辨率分析以及由此构造小波的方法，但在研究小波的优良性时往往遇到一些不可调和的矛盾，例如正交性与对称性、支集长度与消失矩、正交性与插值性等之间的矛盾．现在，我们把多分辨率分析的生成元由一个函数推广到多个函数，即多重多分辨率分析，相应的小波也是由多个函数构成的函数向量，我们称之为**多小波**(Multiwavelet) 或向量小波.

本章主要介绍多重多分辨率分析，矩阵加细方程及其解的存在唯一性与稳定性，多小波的优良特性，常见的正交多小波，正交多小波的 Mallat 算法，预处理和后处理，平衡多小波，以及区间上的正交多小波等.

7.1　多小波的理论基础

最早的多小波由 Alpert 与 Rokhlin 于 1991 年构造，他们发现用多小波求解积分方程具有更好的稀疏逼近性，有利于快速计算．随后，Goodman 和 Lee 于 1994 年将 Mallat 建立的多分辨率分析概念推广到多个函数的情形，提出了多重多分辨率分析的概念，并讨论了正交多小波的基本性质，给出了样条多小波的例子．Chui，Heil，Jiang，Micchelli，Shen，Strela，Xu 等人都从不同的角度研究了矩阵加细方程解的存在性、唯一性和稳定性问题，讨论了多小波的正则性、对称性等优良特性，给出了不少重要的结论．正是这些先驱性工作，奠定了多小波的理论基础.

7.1.1　多重多分辨率分析

设 $r \in \mathbf{Z}^+ /0$，先引入记号 $L^2(\mathbf{R})^r$ 和 $l^2(\mathbf{R})^r$ 如下：

$$L^2(\mathbf{R})^r = \{(f_1(t), f_2(t), \cdots, f_r(t))^{\mathrm{T}} \,|\, f_\nu(t) \in L^2(\mathbf{R}),\ 1 \leqslant \nu \leqslant r\},$$

$$l^2(\mathbf{R})^r = \{(c_1, c_2, \cdots, c_r)^{\mathrm{T}} \,|\, c_\nu \in l^2(\mathbf{R}),\ 1 \leqslant \nu \leqslant r\},$$

其中 $l^2(\mathbf{R})$ 表示实数域上的平方可和序列空间.

定义7.1 $L^2(\mathbf{R})$ 中的闭子空间列 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 称为 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 r **重多分辨率分析**(简记为 MRA^r)，如果满足以下条件：

(1) 单调性：$V_j \subset V_{j+1}$，$\forall j \in \mathbf{Z}$;

(2) 逼近性：$\bigcap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\}$，$\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R})$；

(3) 伸缩性：$f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$；

(4) 存在 r 个函数 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_r(t)$，使得函数族 $\{\varphi_\nu(t-k),\ k\in\mathbf{Z},\ 1\leqslant\nu\leqslant r\}$ 构成闭子空间 V_0 的一个 Riesz 基.

我们称向量函数 $\boldsymbol{\varphi}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_r(t))^{\mathrm{T}}\in L^2(\mathbf{R})^r$ 是 MRA^r 的多重尺度函数或向量尺度函数，简称为**多尺度函数**. 如果函数族

$$\{\varphi_\nu(t-k),\ k\in\mathbf{Z},\ 1\leqslant\nu\leqslant r\}$$

构成 V_0 的一个标准正交基，那么称 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的正交的**多重多分辨率分析**，记为 OMRA^r. 相应地，我们称 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是**正交多尺度函数**.

设 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 OMRA^r，记 $\varphi_\nu(t)$ $(\nu=1,2,\cdots,r)$ 的二进伸缩与整数平移为

$$\varphi_{jk}^{\nu}(t)=2^{\frac{j}{2}}\varphi_\nu(2^jt-k),\quad \forall j,k\in\mathbf{Z}, \tag{7.1}$$

容易证明，函数系

$$\{\varphi_{jk}^{\nu}(t),\ k\in\mathbf{Z},\ 1\leqslant\nu\leqslant r\}$$

构成 V_j 的一个标准正交基. 令 W_j 为 V_j 在 V_{j+1} 上的正交补，即 $V_{j+1}=V_j\oplus W_j$ 且 $V_j\perp W_j$. 根据 MRA^r 的单调性和逼近性可知，$W_j\perp W_k(j\neq k)$，于是有

$$L^2(\mathbf{R})=\bigoplus_{j\in\mathbf{Z}} W_j.$$

相应地，如果存在 $\boldsymbol{\psi}(t)=(\psi_1(t),\psi_2(t),\cdots,\psi_r(t))^{\mathrm{T}}\in L^2(\mathbf{R})^r$，使得 $\{\psi_\nu(t-k),\ k\in\mathbf{Z},\ 1\leqslant\nu\leqslant r\}$ 构成 W_0 的标准正交基，则称 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 是正交多小波或正交向量小波. 此时，$\{2^{\frac{j}{2}}\psi_\nu(2^jt-k),\ k\in\mathbf{Z},\ 1\leqslant\nu\leqslant r\}$ 构成 W_j 的标准正交基.

为了方便起见，当 $r=1$ 时，我们称 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 和 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 分别为单尺度函数和单小波；当 $r>1$ 时，称 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 和 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 分别为多尺度函数和多小波.

于是 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 和 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 满足如下的矩阵两尺度方程(Matrix Two Scaling Equation)：

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varphi}(t)=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{\varphi}(2t-k),\\ \boldsymbol{\psi}(t)=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{G}_k\boldsymbol{\varphi}(2t-k),\end{cases} \tag{7.2}$$

这里，$\boldsymbol{H}_k$ 和$\boldsymbol{G}_k$ 是$r\times r$矩阵，称为两尺度方程的**矩阵尺度系数**，也称为**矩阵滤波器系数**. 式(7.2) 又称为**矩阵加细方程**(Matrix Refinement Equation，MRE).

在频率域上矩阵两尺度方程(7.2) 表示为

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)=\boldsymbol{H}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}\left(\frac{\omega}{2}\right),\\ \hat{\boldsymbol{\psi}}(\omega)=\boldsymbol{G}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}\left(\frac{\omega}{2}\right),\end{cases}\tag{7.3}$$

这里 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 和 $\boldsymbol{G}(\omega)$ 分别是$\{\boldsymbol{H}_k\}$ 和$\{\boldsymbol{G}_k\}$ 的矩阵频率响应(又称矩阵两尺度符号)：

$$\begin{cases}\boldsymbol{H}(\omega)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{H}_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega},\\ \boldsymbol{G}(\omega)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{G}_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}.\end{cases}\tag{7.4}$$

若当$k<0$且$k>N$ $(N\in\mathbf{Z}^+)$ 时，$\boldsymbol{H}_k=\boldsymbol{O}_r$，$\boldsymbol{G}_k=\boldsymbol{O}_r$ (这里 $\boldsymbol{O}_r$ 表示$r\times r$零矩阵)，则称$\{\boldsymbol{\varphi}(t),\boldsymbol{\psi}(t)\}$ 是紧支撑的，此时对应的矩阵频率响应$\{\boldsymbol{H}(\omega),\boldsymbol{G}(\omega)\}$ 是 FIR 多滤波器组，且 MRE 式(7.2) 为

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varphi}(t)=\sum\limits_{k=0}^{N}\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{\varphi}(2t-k),\\ \boldsymbol{\psi}(t)=\sum\limits_{k=0}^{N}\boldsymbol{G}_k\boldsymbol{\varphi}(2t-k).\end{cases}\tag{7.5}$$

例 7.1 线性正交多小波

考虑$r=2$的情形，设函数

$$\varphi_1(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$\varphi_2(t)=\begin{cases}2\sqrt{3}\left(t-\frac{1}{2}\right), & 0\leqslant t<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

容易知道

$$\begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1(2t)\\ \varphi_2(2t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1(2t-1)\\ \varphi_2(2t-1)\end{pmatrix}.\tag{7.6}$$

记$V_j=\overline{\mathrm{span}}\{\varphi_{jk}^1(t),\varphi_{jk}^2(t),\ k\in\mathbf{Z}\}$，其中 $\varphi_{jk}^i(t)$ 的定义如(7.1) 式，则$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$满足定义 7.1 的所有条件，因此$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$是$L^2(\mathbf{R})$的一个正交的 2 重多分辨率分析(OMRA^2)，而$\boldsymbol{\varphi}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t))^{\mathrm{T}}$是相应的正交多尺度函数.

进一步，不难求出正交多小波 $\boldsymbol{\psi}(t)=(\psi_1(t),\psi_2(t))^{\mathrm{T}}$，其中

$$\psi_1(t)=\begin{cases}6t-1, & 0\leqslant t<\dfrac{1}{2},\\ 6t-5, & \dfrac{1}{2}\leqslant t<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$\psi_2(t)=\begin{cases}2\sqrt{3}\left(2t-\dfrac{1}{2}\right), & 0\leqslant t<\dfrac{1}{2},\\ -2\sqrt{3}\left(2t-\dfrac{3}{2}\right), & \dfrac{1}{2}\leqslant t<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

且

$$\begin{pmatrix}\psi_1(t)\\ \psi_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1(2t)\\ \varphi_2(2t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1(2t-1)\\ \varphi_2(2t-1)\end{pmatrix}. \tag{7.7}$$

这里，(7.6) 与(7.7) 式为 OMRA^2 的 MRE，相应的矩阵滤波器为

$$\boldsymbol{H}_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_0=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{G}_1=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

MRE在多小波的构造中起着非常重要的作用. 根据上述讨论可知，多小波 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 是由多尺度函数 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 生成的，只要求出了 $\boldsymbol{\varphi}(t)$，就很容易从 MRE 式(7.2) 确定 $\boldsymbol{\psi}(t)$，并且 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的性质也决定了 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 的性质. 然而，要使一个向量函数 $\boldsymbol{\varphi}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_r(t))^{\mathrm{T}}$ 成为 MRA^r 的多尺度函数，必须解决以下三方面的问题：

(1) $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是可加细的，即满足 MRE 式(7.2)；

(2) 方程(7.2) 的解是唯一的；

(3) 方程(7.2) 的解是稳定的.

下面我们就来详细讨论这些问题.

7.1.2 矩阵加细方程解的存在唯一性

对于单小波($r=1$) 的情形，Daubechies 和 Lagarias 从分布的角度详细讨论了加细方程解的存在唯一性问题(见文献[50],[51])，其主要结论可归纳

如下：

(1) 存在紧支分布的尺度函数 $\varphi(t)$，当且仅当 $H(0)=2^n$，其中 $n\in \mathbf{Z}^+$. 此时，若 $\varphi(t)$ 是可积的，且 $\operatorname{supp}\varphi=[0,N]$，则 $\varphi(t)$ 具有至多 $N-2$ 阶连续导数.

(2) 若 $H(0)=1$，则无穷乘积 $\prod_{j=1}^{+\infty}H(2^{-j}\omega)$ 一致收敛到 $P(\omega)$，此时 $\hat{\varphi}(0)\neq 0$，且 $\varphi(t)$ 可由公式 $\hat{\varphi}(\omega)=P(\omega)\hat{\varphi}(0)$ 唯一确定(至多相差一个常数).

(3) 若 $H(0)=2^n$，$n>0$，则存在分布函数 $F(t)$，使得 $\varphi(t)$ 等于 $F(t)$ 的 n 阶导数，且 $\hat{\varphi}(0)=0$.

因此单小波的情形比较简单，只要满足 $H(0)=1$ 这个条件(现有的单小波都满足)，其紧支分布解的存在唯一性就确定了.

对于多小波(即 $r>1$ 的情形)，仍有类似的结论. 一方面，反复利用频域上的 MRE 式(7.3)，可得 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)$ 的乘积形式：

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)=\Big(\prod_{j=1}^{n}\boldsymbol{H}(2^{-j}\omega)\Big)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(2^{-n}\omega).$$

另一方面，在式(7.3)中令 $\omega=0$，得

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}(0)=\boldsymbol{H}(0)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(0).$$

于是我们推断：或者 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(0)=\mathbf{0}$；或者 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(0)$ 是 $\boldsymbol{H}(0)$ 的属于特征值 1 的右特征向量. 因此，$\boldsymbol{H}(0)$ 在 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的求解中仍起着非常关键的作用.

定理7.1 MRE 式(7.2)有紧支分布解，当且仅当 $\boldsymbol{H}(0)$ 有形如 2^n 的特征值，$n\in\mathbf{Z}^+$.

证 必要性. 由于MRE有紧支解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$，因而 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)\neq 0$，于是存在正整数 n，使 $D^n\hat{\boldsymbol{\varphi}}(0)\neq 0$，$D^k\hat{\boldsymbol{\varphi}}(0)=0$，$k=0,1,\cdots,n-1$. 根据 Leibniz 公式，得

$$\begin{aligned}D^n\hat{\boldsymbol{\varphi}}(0)&=D^n\Big[\boldsymbol{H}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\hat{\boldsymbol{\varphi}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\Big]_{\omega=0}\\&=2^{-n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}D^{n-j}\boldsymbol{H}(0)D^j\hat{\boldsymbol{\varphi}}(0)\\&=2^{-n}\boldsymbol{H}(0)D^n\hat{\boldsymbol{\varphi}}(0).\end{aligned}$$

所以，$\boldsymbol{H}(0)$ 有 2^n 形式的特征值，$n\in\mathbf{Z}^+$.

充分性. 因为

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)=\Big(\prod_{j=1}^{n}\boldsymbol{H}(2^{-j}\omega)\Big)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(2^{-n}\omega),$$

所以问题的关键是证 $\boldsymbol{P}(\omega)^{\infty}=\prod_{j=1}^{\infty}\boldsymbol{H}(2^{-j}\omega)$ 存在且一致收敛.

当 $n=0$ 时，$\hat{\boldsymbol{\varphi}}(0)\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{H}(0)$ 有右特征向量 $\boldsymbol{u}$，使得 $\boldsymbol{H}(0)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$. 于是 $\lim_{j\to\infty}(\boldsymbol{H}(0))^{j}$ 存在且有非平凡解，故 $\boldsymbol{P}(\omega)^{\infty}$ 存在且一致收敛于 $\boldsymbol{P}(\omega)$，

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)=\boldsymbol{P}(\omega)\boldsymbol{u},\quad \mathrm{supp}\boldsymbol{\varphi}=[0,N].$$

当 $n>0$ 时，令

$$\boldsymbol{\varphi}_n(t)=2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{\varphi}_n(2t-k),$$

则 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(0)\neq 0$，且 1 是 $2^{-n}\boldsymbol{H}(0)$ 的特征值. 与上面的讨论相同，$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_n$ 有解，且 $\boldsymbol{\varphi}$ 是 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_n$ 的 n 次分布导数. ∎

与单小波不同的是，当 $n=0$ 时，并不能唯一确定多尺度函数 $\boldsymbol{\varphi}(t)$. 事实上，$\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的唯一性与 $\boldsymbol{H}(0)$ 的特征值 2^n 的重数有关. 假定 $\boldsymbol{H}(0)$ 的形如 2^n 的特征值只有 1，则有下面的定理.

定理7.2 MRE 式(7.2) 有唯一解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$（至多相差一个常数），当且仅当 1 是 $\boldsymbol{H}(0)$ 的单特征值，且 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(0)$ 是 $\boldsymbol{H}(0)$ 的属于特征值 1 的右特征向量. 此时，有

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)=\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}\boldsymbol{H}(2^{-j}\omega)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(0).$$

证 见参考文献[79]. ∎

7.1.3 矩阵加细方程解的稳定性

我们先定义 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的 L^2 稳定性和自相关符号.

定义7.2 设 $\boldsymbol{\varphi}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_r(t))^{\mathrm{T}}\in L^2(\mathbf{R})^r$，如果 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的整数平移构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 Riesz 基，即存在常数 $0<A\leqslant B<+\infty$，使得 $\forall\{\boldsymbol{c}_k\}_{k\in\mathbf{Z}}\in l^2(\mathbf{R})^r$，

$$A\sum_{k\in\mathbf{Z}}\|\boldsymbol{c}_k\|^2\leqslant\left\|\sum_{k\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{c}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}(\cdot-k)\right\|^2\leqslant B\sum_{k\in\mathbf{Z}}\|\boldsymbol{c}_k\|^2 \tag{7.8}$$

成立，则称 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是 L^2 **稳定的**.

定义7.3 设 $\boldsymbol{\varphi}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_r(t))^{\mathrm{T}}\in L^2(\mathbf{R})^r$，则 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的自相关符号 $\Omega_{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)$ 定义为

$$\Omega_{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}(\langle\varphi_\mu,\varphi_\upsilon(\cdot-k)\rangle)_{\mu,\upsilon=1}^{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}.$$

利用 Poisson 求和公式，可得

$$\Omega_{\varphi}(\omega)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\omega+2\pi k)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\omega+2\pi k)^{*}.$$

这里，$\boldsymbol{A}^{*}$ 表示向量或矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置$\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$(本章后续部分均同此约定).

显然，自相关符号 $\Omega_{\varphi}(\omega)$ 是半正定的，并且有下述定理.

定理7.3 设 $\boldsymbol{\varphi}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_r(t))^{\mathrm{T}}\in L^2(\mathbf{R})^r$，其中 $\varphi_\nu(t)$ 是紧支撑的，$1\leqslant\nu\leqslant r$，则下述命题相互等价：

(1) $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是 L^2 稳定的；

(2) $\forall\omega\in[0,2\pi]$，自相关符号 $\Omega_{\varphi}(\omega)$ 是严格正定的；

(3) $\forall t\in\mathbf{R}$，$\{\varphi_\nu(t+k),\ 1\leqslant\nu\leqslant r,\ k\in\mathbf{Z}\}$ 是 ω - 无关的；

(4) $\forall\omega\in\mathbf{R}$，$\{\hat{\varphi}_\nu(\omega+2\pi k),\ 1\leqslant\nu\leqslant r,\ k\in\mathbf{Z}\}$ 是 ω - 无关的.

证 (1)⇔(2)，见参考文献[68]或[71].

(1)⇔(4)，见参考文献[89].

(3)⇔(4)，见参考文献[87]. ∎

在具体应用中，这些条件是很难判断的，能不能用与 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 对应的 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 来刻画其稳定性呢? 我们先来看一个必要条件.

定理7.4 设 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是MRE式(7.2)的紧支 L^2 稳定解，$\boldsymbol{H}(\omega)$ 是相应的频率响应，则

(1) $\boldsymbol{H}(0)$ 满足条件 E，且 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(0)$ 是 $\boldsymbol{H}(0)$ 的属于特征值 1 的右特征向量.（一般地，我们说一个方阵 $\boldsymbol{M}$ 满足条件 E，是指 $\boldsymbol{M}$ 的谱半径 $\rho(\boldsymbol{M})\leqslant 1$，且 $\boldsymbol{M}$ 在单位圆上只有特征值 1 且为单根.）

(2) 存在 $\boldsymbol{H}(0)$ 的左特征向量 $\boldsymbol{u}^{*}\in\mathbf{C}^r$，使得

$$\boldsymbol{u}^{*}\boldsymbol{H}(0)=\boldsymbol{u}^{*}\quad 且\quad \boldsymbol{u}^{*}\boldsymbol{H}(\pi)=\mathbf{0}.$$

证 由于 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是MRE式(7.2)的紧支 L^2 稳定解，由定理7.3可知，自相关符号 $\Omega_{\varphi}(\omega)$ 对任意的 $\omega\in\mathbf{R}$ 都是严格正定的.

引进频率响应 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 的变换算子 $T_{\boldsymbol{H}}$，即

$$T_{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{P}(\omega)=\boldsymbol{H}\left(\frac{\omega}{2}\right)\boldsymbol{P}\left(\frac{\omega}{2}\right)\boldsymbol{H}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{*}+\boldsymbol{H}\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\boldsymbol{P}\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\boldsymbol{H}\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)^{*}.$$

根据公式(7.3)，得

$$\Omega_{\varphi}(2\omega)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\hat{\boldsymbol{\varphi}}(2\omega+2\pi k)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(2\omega+2\pi k)^{*}$$

$$= \sum_{k\in\mathbf{Z}} \boldsymbol{H}(\omega+\pi k)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\omega+\pi k)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\omega+\pi k)^* \boldsymbol{H}(\omega+\pi k)^*.$$

将上式按 k 的奇偶性分成两部分，并注意到 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 的 2π 周期性，得

$$\begin{aligned}\Omega_{\boldsymbol{\varphi}}(2\omega) &= \boldsymbol{H}(\omega)\Omega_{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)\boldsymbol{H}(\omega)^* + \boldsymbol{H}(\omega+\pi)\Omega_{\boldsymbol{\varphi}}(\omega+\pi)\boldsymbol{H}(\omega+\pi)^* \\ &= T_{\boldsymbol{H}}\Omega_{\boldsymbol{\varphi}}(2\omega).\end{aligned}$$

因此，$T_{\boldsymbol{H}}\Omega_{\boldsymbol{\varphi}} = \Omega_{\boldsymbol{\varphi}}$，故 $\Omega_{\boldsymbol{\varphi}}$ 是算子 $T_{\boldsymbol{H}}$ 的对应于特征值 1 的特征矩阵.

设 λ 是 $\boldsymbol{H}(0)$ 的特征值，$\boldsymbol{u}^* \in \mathbf{C}^r$ 是对应的左特征向量，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}^*\Omega_{\boldsymbol{\varphi}}(0)\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}^* T_{\boldsymbol{H}}\Omega_{\boldsymbol{\varphi}}(0)\boldsymbol{u} \\ &= \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{H}(0)\Omega_{\boldsymbol{\varphi}}(0)\boldsymbol{H}(0)^*\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{H}(\pi)\Omega_{\boldsymbol{\varphi}}(\pi)\boldsymbol{H}(\pi)^*\boldsymbol{u} \\ &\geqslant |\lambda|^2\boldsymbol{u}^*\Omega_{\boldsymbol{\varphi}}(0)\boldsymbol{u}.\end{aligned}$$

因此 $|\lambda| \leqslant 1$. 考虑 $\lambda = 1$ 的情况，由于 $\boldsymbol{u}^*$ 是 $\boldsymbol{H}(0)$ 的左特征向量，所以

$$\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{H}(0) = \boldsymbol{u}^*.$$

注意到 $\Omega_{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)$ 是严格正定的，所以 $\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{H}(\pi)\Omega_{\boldsymbol{\varphi}}(\pi)\boldsymbol{H}(\pi)^*\boldsymbol{u} = 0$，从而

$$\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{H}(\pi) = \boldsymbol{0}.$$

又根据 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是 L^2 稳定解可得 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(0) = \boldsymbol{H}(0)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(0)$，所以 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(0)$ 是 $\boldsymbol{H}(0)$ 的属于特征值 1 的右特征向量.

假定解是唯一的，则 1 是 $\boldsymbol{H}(0)$ 的单特征值. 单位圆上的其他特征值均和解的稳定性矛盾. 综上所述，$\boldsymbol{H}(0)$ 满足条件 E. ∎

顺便指出，$\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的稳定性隐含了 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 具有一阶消失矩.

定理 7.4 只给出了 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是稳定解的必要条件，但要完整地给出充要条件，即使在单小波情形下也是比较复杂的，Lawton 和Cohen 等都分别给出了不同的判别准则. 对于多小波的稳定性，也有很多文献进行研究，归纳起来大致有三种不同的方法：

(1) 讨论变换算子 $T_{\boldsymbol{H}}$ 的谱特性，得到广义的 Lawton 条件；

(2) 直接讨论矩阵尺度符号 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 的谱分解，得到广义的 Cohen 条件；

(3) 把多小波的稳定性与细分法(Subdivision Schemes) 的收敛性紧密联系起来.

这里只给出用第一种方法得到的结论. 为此，记 M_N 表示所有以次数不超过 N 的三角多项式为元素的 $r\times r$ 矩阵构成的空间.

定理7.5 向量函数 $\boldsymbol{\varphi}(t) \in L^2(\mathbf{R})^r$ 是 MRE 式(7.2) 的 L^2 稳定解，当且仅当 $\boldsymbol{H}(0)$ 满足条件 E，相应的变换算子 $T_{\boldsymbol{H}}$ 限制在 M_N 上也满足条件 E，且 $T_{\boldsymbol{H}}$ 对应于特征值 1 的特征矩阵是正定的.

证 必要性. 由定理 7.4 和定理 7.3 我们已经知道，$\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是稳定的，则

$\boldsymbol{H}(0)$ 满足条件 E，且自相关符号 $\Omega_{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)$ 对任意的 $\omega\in\mathbf{R}$ 都是严格正定的，而 $T_{\boldsymbol{H}}\Omega_{\boldsymbol{\varphi}}=\Omega_{\boldsymbol{\varphi}}$，即 $\Omega_{\boldsymbol{\varphi}}$ 是算子 $T_{\boldsymbol{H}}$ 对应于特征值 1 的特征矩阵. 因此下面只需要证明变换算子 $T_{\boldsymbol{H}}$ 限制在 M_N 上满足条件 E.

设存在 $|\lambda|>1$，使得 $T_{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{P}_1=\lambda\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_1\in M_N$. 由 $T_{\boldsymbol{H}}$ 的定义可知

$$(T_{\boldsymbol{H}}^n\boldsymbol{P}_1)(\omega)=\sum_{k=0}^{2^n-1}\boldsymbol{\Pi}_n(\omega+2\pi k)\boldsymbol{P}_1\left(\frac{\omega+2\pi k}{2^n}\right)\boldsymbol{\Pi}_n(\omega+2\pi k)^*,$$

这里

$$\boldsymbol{\Pi}_n(\omega)=\prod_{j=1}^{n}\boldsymbol{H}(2^{-j}\omega),\quad 且\quad \boldsymbol{P}(\omega)=\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{\Pi}_n(\omega).$$

因为 $\boldsymbol{H}(0)$ 满足条件 E，所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{U}$，使得

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{H}(0)\boldsymbol{U}^{-1}=\begin{pmatrix}1&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\boldsymbol{J}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{J}$ 是 Jordan 矩阵，且 $\rho(\boldsymbol{J})<1$. 因此

$$\boldsymbol{P}(\omega)\boldsymbol{U}^{-1}=(\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\omega),0,\cdots,0).$$

设 $\boldsymbol{U}\boldsymbol{P}_1(\omega)\boldsymbol{U}^*$ 的第一项为 c，则 $c>0$，故有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(\omega)\boldsymbol{P}_1(0)\boldsymbol{P}(\omega)^*&=\boldsymbol{P}(\omega)\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{P}_1(0)\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{U}^{-1})^*\boldsymbol{P}(\omega)^*\\&=c\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)^*.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}c\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)^*\mathrm{d}\omega&=\lim_{n\to\infty}\int_{-2^n\pi}^{2^n\pi}\boldsymbol{\Pi}_n(\omega)\boldsymbol{P}_1(2^{-n}\omega)\boldsymbol{\Pi}_n(\omega)^*\mathrm{d}\omega\\&=\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(T_{\boldsymbol{H}}^n\boldsymbol{P}_1)(\omega)\mathrm{d}\omega\\&=\lim_{n\to\infty}\lambda^n\int_{-\pi}^{\pi}\boldsymbol{P}_1(\omega)\mathrm{d}\omega.\end{aligned}\tag{7.9}$$

因为 $|\lambda|>1$，所以上述极限是发散的，与 $\boldsymbol{\varphi}(t)\in L^2(\mathbf{R})^r$ 矛盾. 这就证得 $\rho(T_{\boldsymbol{H}})\leqslant 1$.

进一步，类似于定理 7.4 的证明，1 是 $T_{\boldsymbol{H}}$ 的单特征值，因此 $T_{\boldsymbol{H}}$ 满足条件 E.

充分性. 首先由(7.9)式可知 $T_{\boldsymbol{H}}$ 满足条件 E，所以 $\Omega_{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)$ 是严格正定的 $(\forall\omega\in[0,2\pi])$. 再根据定理 7.3，$\boldsymbol{\varphi}(t)\in L^2(\mathbf{R})^r$ 是 L^2 稳定的. ∎

多尺度函数 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的稳定性是非常重要的，由此不仅可知 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 具有一阶消失矩，而且可以方便地讨论 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的正则性. 进一步还可以证明：若 $\boldsymbol{\varphi}(t)\in L^2(\mathbf{R})^r$ 是 MRE 式(7.2)的紧支稳定解，则 MRA^r 的逼近性自然成立(其证明同单小波情形完全一样，见文献[49]).

7.2 多小波基的优良性质

小波之所以在数值计算、信号去噪及图像压缩等许多领域得到广泛应用，主要是因为用小波基可以稀疏地表示或逼近函数(或者信号)，小波基的这种性能主要依赖其优良的数学特性 —— 正交性、消失矩、正则性、对称性以及紧支性等. 多小波因为增加了小波函数的个数而能够更好地处理单小波无法克服的一些问题，例如正交性和对称性之间的矛盾，支集长度和消失矩阶数之间的矛盾，正交性和插值性之间的矛盾，等等. 下面我们讨论多小波基的这些基本性质.

本节中未予证明或未指明出处的几个定理，请参阅文献[212]及其所引参考文献给出的证明.

7.2.1 多小波的正交性

为方便起见，我们把多尺度函数的正交性用矩阵形式描述如下：

定义 7.4 称多尺度函数 $\boldsymbol{\varphi}(t) \in L^2(\mathbf{R})^r$ **是正交的**，若

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{\varphi}^*(t-k)\mathrm{d}t = \delta_{k0}\boldsymbol{I}_r, \quad \forall k \in \mathbf{Z}. \tag{7.10}$$

若 $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_r(t))$，则(7.10)式等价于$\{\varphi_\nu(t-k),\ 1 \leqslant \nu \leqslant r,\ k \in \mathbf{Z}\}$为正交函数系，亦即

$$\langle \varphi_i(t), \varphi_j(t-k) \rangle = \delta_{ij}\delta_{k0}, \quad \forall i,j,k \in \mathbf{Z}.$$

根据定义可立即得到：$\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是正交的，当且仅当自相关符号 $\Omega_{\boldsymbol{\varphi}}(\omega) = \boldsymbol{I}_r$. 所以利用关系式 $T_{\boldsymbol{H}}\Omega_{\boldsymbol{\varphi}} = \Omega_{\boldsymbol{\varphi}}$ 可立即证明下面的必要条件.

定理 7.6 设 $\boldsymbol{\varphi}(t) \in L^2(\mathbf{R})^r$ 是由 MRE 式(7.2)确定的正交多尺度函数，$\boldsymbol{H}(\omega)$ 是相应的矩阵两尺度符号，则

$$\boldsymbol{H}(\omega)\boldsymbol{H}(\omega)^* + \boldsymbol{H}(\omega+\pi)\boldsymbol{H}(\omega+\pi)^* = \boldsymbol{I}_r, \quad \omega \in [0, 2\pi], \tag{7.11}$$

或

$$\boldsymbol{H}(z)\boldsymbol{H}(z)^* + \boldsymbol{H}(-z)\boldsymbol{H}(-z)^* = \boldsymbol{I}_r, \quad |z| = 1, \tag{7.12}$$

即

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} \boldsymbol{H}_j\boldsymbol{H}_{j+2k}^{\mathrm{T}} = 2\delta_{k0}\boldsymbol{I}_r, \quad \forall k \in \mathbf{Z}. \tag{7.13}$$

如果 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 是对应的多小波，$\boldsymbol{G}(\omega)$ 是相应的矩阵两尺度符号，那么 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 是正交的，当且仅当

$$\begin{cases} \boldsymbol{G}(\omega)\boldsymbol{G}(\omega)^* + \boldsymbol{G}(\omega+\pi)\boldsymbol{G}(\omega+\pi)^* = \boldsymbol{I}_r, \\ \boldsymbol{H}(\omega)\boldsymbol{G}(\omega)^* + \boldsymbol{H}(\omega+\pi)\boldsymbol{G}(\omega+\pi)^* = \boldsymbol{O}_r, \end{cases} \quad \omega \in [0,2\pi], \tag{7.14}$$

或者

$$\begin{cases} \boldsymbol{G}(z)\boldsymbol{G}(z)^* + \boldsymbol{G}(-z)\boldsymbol{G}(-z)^* = \boldsymbol{I}_r, \\ \boldsymbol{H}(z)\boldsymbol{G}(z)^* + \boldsymbol{H}(-z)\boldsymbol{G}(-z)^* = \boldsymbol{O}_r, \end{cases} \quad |z| = 1, \tag{7.15}$$

即

$$\begin{cases} \sum_{j\in\mathbf{Z}} \boldsymbol{G}_j \boldsymbol{G}_{j+2k}^{\mathrm{T}} = 2\delta_{k0}\boldsymbol{I}_r, \\ \sum_{j\in\mathbf{Z}} \boldsymbol{H}_j \boldsymbol{G}_{j+2k}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{O}, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{7.16}$$

我们称满足式(7.11) 和(7.14) 的$\{\boldsymbol{H}(\omega),\boldsymbol{G}(\omega)\}$为**矩阵共轭正交滤波器**(Matrix Conjugate Quadrature Filter, MCQF).

如果定义

$$D_{\boldsymbol{H},\boldsymbol{G}}(z) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}(z) & \boldsymbol{H}(-z) \\ \boldsymbol{G}(z) & \boldsymbol{G}(-z) \end{bmatrix},$$

则式(7.12) 和(7.15) 成立，等价于 $D_{\boldsymbol{H},\boldsymbol{G}}(z)$ 是 $|z|=1$ 上的酉阵，即

$$D_{\boldsymbol{H},\boldsymbol{G}}(z) D_{\boldsymbol{H},\boldsymbol{G}}(z)^* = \boldsymbol{I}_{2r}. \tag{7.17}$$

式(7.17) 对于构造 $\boldsymbol{G}$ (即高通 MCQF) 是非常有用的.

我们注意到，定理 7.6 只给出了正交多小波的必要条件. 其实，只需简单利用定理 7.5 就可以得到正交多小波的等价条件.

定理7.7 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 和 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 是正交多尺度函数和多小波，当且仅当对应的矩阵两尺度符号$\{\boldsymbol{H}(\omega),\boldsymbol{G}(\omega)\}$是 MCQF，且变换算子 $T_{\boldsymbol{H}}$ 满足条件 E.

观察 MRE 式(7.2)，不难发现下面的结论：

定理7.8 设$\boldsymbol{\varphi}(t)$和$\boldsymbol{\psi}(t)$是多尺度函数和多小波，对应的矩阵两尺度符号是$\{\boldsymbol{H},\boldsymbol{G}\}$，若$\boldsymbol{U}_1$和$\boldsymbol{U}_2$是任意的非奇异阵，则$\boldsymbol{\varphi}_1=\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\varphi}$和$\boldsymbol{\psi}_1=\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{\psi}$也是多尺度函数和多小波，对应的矩阵两尺度符号是$\{\widetilde{\boldsymbol{H}},\widetilde{\boldsymbol{G}}\}$，其中

$$\widetilde{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{H}\boldsymbol{U}_1^{-1}, \quad \widetilde{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{U}_2\boldsymbol{G}\boldsymbol{U}_2^{-1}.$$

特别地，若$\boldsymbol{\varphi}(t)$和$\boldsymbol{\psi}(t)$是正交的，$\{\boldsymbol{H},\boldsymbol{G}\}$是一个MCQF，则只要$\boldsymbol{U}_1$和$\boldsymbol{U}_2$是正交阵，$\{\widetilde{\boldsymbol{H}},\widetilde{\boldsymbol{G}}\}$也是一个 MCQF (此时 $\widetilde{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{H}\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}$，$\widetilde{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{U}_2\boldsymbol{G}\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}$).

由于多小波往往理解为是由多尺度函数生成的，我们不希望改变这样的

关系，因此在应用中，常取 $U_2 = I$，实验结果也表明这样取的效果是最优的.

根据定理 7.8，我们可以把已知的多尺度函数 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 和多小波 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 通过上面的变换改造成性质更好的多小波 $\{\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(t),\widetilde{\boldsymbol{\psi}}(t)\}$，而不改变多小波的其他性质. 受此启发，我们引入下面的重要概念 —— 两尺度相似变换.

定义 7.5 设 $\boldsymbol{M}(\omega)$ 对所有 $\omega \in \mathbf{R}$ 是非奇异矩阵，称

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}(\omega) = \boldsymbol{M}(2\omega)\boldsymbol{H}(\omega)\boldsymbol{M}^{-1}(\omega) \tag{7.18}$$

是 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 关于 $\boldsymbol{M}(\omega)$ 的**两尺度相似变换**(Two Scale Similarity Transform, TSST). 相应地，把 $\boldsymbol{M}(\omega)$ 称为**相似变换矩阵**.

同样可以定义 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 的逆两尺度相似变换为 $\boldsymbol{M}^{-1}(2\omega)\boldsymbol{H}(\omega)\boldsymbol{M}(\omega)$. 这里仅用 TSST 进行讨论.

在式(7.18) 中，令 $\omega = 0$，则 $\widetilde{\boldsymbol{H}}(0)$ 是 $\boldsymbol{H}(0)$ 的相似变换，于是有下面的定理：

定理7.9 设 $\boldsymbol{M}(\omega)$ 对所有 $\omega \in \mathbf{R}$ 是可逆的，$\widetilde{\boldsymbol{H}}(\omega)$ 是 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 的 TSST，则 $\widetilde{\boldsymbol{H}}(0)$ 与 $\boldsymbol{H}(0)$ 具有相同的特征值和特征向量.

对于一个非正交的多尺度函数 $\boldsymbol{\varphi}(t)$，如何利用 TSST 使得 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 正交化呢?我们可以利用自相关符号 $\Omega_{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)$ 的性质，构造正交的多尺度函数. 具体计算过程如下：

第 1 步 计算 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的自相关符号 $\Omega_{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)$. 显然 $\Omega_{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)$ 是正定的，且

$$\Omega_{\boldsymbol{\varphi}}(\omega) \neq \boldsymbol{I}_r.$$

第 2 步 对 $\Omega_{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)$ 进行平方根分解：

$$\Omega_{\boldsymbol{\varphi}}(\omega) = \boldsymbol{M}_0(\omega)\boldsymbol{M}_0(\omega)^*,$$

这样的可逆矩阵 $\boldsymbol{M}_0(\omega)$ 一定存在.

第 3 步 计算 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1(\omega) = \boldsymbol{M}_0^{-1}(\omega)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)$. 易知，$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1(\omega)$ 满足两尺度方程：

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1(\omega) = \widetilde{\boldsymbol{H}}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

这里 $\widetilde{\boldsymbol{H}}(\omega)$ 是 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 关于 $\boldsymbol{M}_0^{-1}(\omega)$ 的 TSST.

第 4 步 求 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1(\omega)$ 的 Fourier 逆变换 $\boldsymbol{\varphi}_1(t)$. 因为 $\Omega_{\boldsymbol{\varphi}_1} = \boldsymbol{I}_r$，所以 $\boldsymbol{\varphi}_1(t)$ 是正交多尺度函数.

若 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是稳定的，则由上述正交化方法得到的 $\boldsymbol{\varphi}_1(t)$ 也是稳定的，这是因为 $\boldsymbol{M}(\omega)$ 可逆，$\widetilde{\boldsymbol{H}}(0)$ 和 $\boldsymbol{H}(0)$ 具有相同的特征值.

在工程应用特别是图像压缩中，双正交小波比正交小波有更好的效果. 所以，类似于单小波的双正交性引入双正交多小波也是很有意义的，这里我们就不作深入讨论了.

7.2.2 多小波的消失矩特性

定义 7.6 设 $\boldsymbol{\psi}(t)=(\psi_1(t),\psi_2(t),\cdots,\psi_r(t))^{\mathrm{T}}\in L^2(\mathbf{R})^r$ 是由 MRE 式 (7.2) 确定的多小波，若

$$\int_{-\infty}^{+\infty}t^k\psi_\nu(t)\mathrm{d}t=0,\quad k=0,1,\cdots,m-1;\ 1\leqslant\nu\leqslant r,$$

则称 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 具有 m 阶消失矩.

对于单小波($r=1$ 的情形)，如果 $\varphi(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 是双尺度方程的紧支稳定解，$\psi(t)$ 是相应的小波，频率响应是$\{H(\omega),G(\omega)\}$，则下述命题是相互等价的(见文献[49],[103])：

(1) $\psi(t)$ 具有 m 阶消失矩；

(2) 定义循环矩阵 $\boldsymbol{L}=(h_{2i-j})_{i,j=0}^N$，考虑其最大子块 L_{N+1}，则 L_{N+1} 有特征值 $1,\frac{1}{2},\cdots,\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$；

(3) 任意光滑函数 $f(t)$ 都可用 $\varphi(t)$ 在每个尺度 2^{-j} 上作逼近，逼近阶是 $O(2^{-jm})$ (也称逼近阶等于 m)，即

$$\left\|f-\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_k\varphi(2^j\cdot-k)\right\|\leqslant C2^{-jm}\,\|f^{(m)}\|,\tag{7.19}$$

而 $f(t)$ 的小波系数具有衰减阶 $O(2^{-jm})$，即

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\psi(2^jt)\mathrm{d}t\right|\leqslant C2^{-jm};$$

(4) 多项式 $t^l=\sum_{k\in\mathbf{Z}}u_l(k)\varphi(t+k)$，$l=0,1,\cdots,m-1$；

(5) 对于任意 $k\in\mathbf{Z}\backslash\{0\}$，$\hat{\varphi}(\omega)$ 在 $\omega=2k\pi$ 处有 m 重零点，即

$$H(0)=1,\ \mathrm{D}^jH(2k\pi)=0,\quad j=0,1,\cdots,m-1,$$

其中 D^j 表示微分算子，即 $\mathrm{D}^j=\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}\omega^j}$；

(6) 对于 $j=0,1,\cdots,m-1$，有

$$\sum_{k=0}^Nh_k=2,\quad\sum_{k=0}^N(-1)^kk^jh_k=0.\tag{7.20}$$

从上面的结论可以看出，小波基的消失矩特性从本质上决定了该小波逼近光滑函数的能力，因而在应用中是很有用的.

多小波的消失矩特性比单小波要复杂得多，许多学者都从不同的角度进行了研究(见文献[113])，得到了不少重要结论. 下面的定理概括了一些类似于单小波情形的结论：

定理7.10 设$\boldsymbol{\varphi}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_r(t))^{\mathrm{T}}\in L^2(\mathbf{R})^r$是紧支$L^2$稳定的，$\boldsymbol{\psi}(t)$是对应的多小波，$\{\boldsymbol{H}(\omega),\boldsymbol{G}(\omega)\}$是对应的频率响应，则下述命题是相互等价的：

(1) $\boldsymbol{\psi}(t)$具有m阶消失矩；

(2) 定义循环矩阵$\boldsymbol{L}=(\boldsymbol{H}_{2i-j})$，$\boldsymbol{L}$有特征值$2^{-j}$，设对应的特征向量为$\boldsymbol{y}^{(j)}$，即$\boldsymbol{y}^{(j)}\boldsymbol{L}=2^{-j}\boldsymbol{y}^{(j)}$，$j=0,1,\cdots,m-1$，且$\boldsymbol{y}^{(j)}=(\boldsymbol{y}_l^{(j)})_{l\in\mathbf{Z}}$的每一个元素具有下面的形式：

$$\boldsymbol{y}_l^{(j)}=\sum_{k=0}^{j}\begin{pmatrix}j\\k\end{pmatrix}(-l)^{j-k}\boldsymbol{y}_0^{(k)},\tag{7.21}$$

这里，$\boldsymbol{y}_0^{(0)},\boldsymbol{y}_0^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}_0^{(m-1)}\in\mathbf{R}^r$是确定的；

(3) 任意光滑向量函数$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_r)^{\mathrm{T}}\in L^2(\mathbf{R})^r$都可用$\boldsymbol{\varphi}(t)$在每个尺度$2^{-j}$上作逼近，其逼近阶是$O(2^{-jm})$，且$\boldsymbol{f}$的小波系数具有衰减阶$O(2^{-jm})$，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{\psi}(2^jt)\rangle\mathrm{d}t\leqslant C2^{-jm};$$

(4) 对于$j=0,1,\cdots,m-1$，存在行向量序列$\boldsymbol{y}_l^{(j)}\in\mathbf{R}^r$，$l\in\mathbf{Z}$，使得

$$t^j=\sum_{l\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{y}_l^{(j)}\boldsymbol{\varphi}(t+l),\quad t\in\mathbf{R};\tag{7.22}$$

这里，$(\boldsymbol{y}_l^{(j)})_{l\in\mathbf{Z}}$也要满足式(7.21)；

(5) 存在唯一超函数$S(t)=\sum_{k=0}^{n}\langle\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{\varphi}(t-k)\rangle$，$n$是某个正整数，使得$S(0)=1$，且对于$j=0,1,\cdots,m-1$，有

$$D^jS(2k\pi)=0,\quad k\in\mathbf{Z}\backslash\{0\};$$

(6) 存在向量$\boldsymbol{y}_0^{(0)},\boldsymbol{y}_0^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}_0^{(m-1)}\in\mathbf{R}^r$，使得对$j=0,1,\cdots,m-1$，有

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{j}\begin{pmatrix}j\\k\end{pmatrix}2^k\mathrm{i}^{k-j}\boldsymbol{y}_0^{(k)}(D^{j-k}\boldsymbol{H})(0)=\boldsymbol{y}_0^{(j)},\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{j}\begin{pmatrix}j\\k\end{pmatrix}2^k\mathrm{i}^{k-j}\boldsymbol{y}_0^{(k)}(D^{j-k}\boldsymbol{H})(\pi)=0;\end{cases}\tag{7.23}$$

(7) 设$\boldsymbol{y}^{(j)}$是循环矩阵$\boldsymbol{L}$的属于特征值2^{-j}的特征向量，并且其每一项具有式(7.21)的形式，则

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{l\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{y}_l^{(j)}\boldsymbol{H}_{2l}=2^{-j}\boldsymbol{y}_0^{(j)},\\ \displaystyle\sum_{l\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{y}_l^{(j)}\boldsymbol{H}_{2l+1}=2^{-j}\sum_{k=0}^{j}\begin{pmatrix}j\\k\end{pmatrix}\boldsymbol{y}_0^{(k)},\end{cases}\quad j=0,1,\cdots,m-1.\tag{7.24}$$

证 参见文献[112],[113]. ∎

下面我们对定理 7.10 的基本含义作一些简单分析.

考虑 $m=1$ 的情形.

关于稳定性的分析已经得到了这样的结论：$\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的稳定性隐含着 1 阶消失矩，即存在 $\boldsymbol{H}(0)$ 的左特征向量 $\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^r$，使得

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(0)=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \quad 且 \quad \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\pi)=\mathbf{0}. \tag{7.25}$$

将 $\boldsymbol{H}(0)$ 分开来写：

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(0)=\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2+\cdots)=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}},$$

且

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\pi)=\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}_0-\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2-\cdots)=\mathbf{0}.$$

两式相加减，可以得到式(7.25) 的等价式：

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\sum_{l\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{H}_{2l}=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\sum_{l\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{H}_{2l+1}=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}.$$

这就是定理 7.10 的结论(7) $(m=1)$，其中 $\boldsymbol{u}$ 在这里起了非常重要的作用. 同样，令

$$F_0(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}(t-k)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\sum_{l\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{H}_l\boldsymbol{\varphi}(2t-2k-l),$$

其中，$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}=\sum_{i=1}^{r}u_i\varphi_i$. 我们看到

$$\begin{aligned}F_0(t)&=\sum_{l\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_{2l}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{\varphi}(2t-2k-2l)\\&\quad+\sum_{l\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_{2l+1}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{\varphi}(2t-2k-2l-1)\\&=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{\varphi}(2t-2k)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{\varphi}(2t-2k-1)\\&=F_0(2t).\end{aligned}$$

在适当的假设下有：$F_0(t)=$ 常数，此即定理 7.10 的结论(4).

对于 $m>1$ 的情形，由于 $\det\boldsymbol{H}(\pi)=0$，于是无法确定 $\boldsymbol{H}'(\pi)$, $\boldsymbol{H}''(\pi),\cdots,\boldsymbol{H}^{(m-1)}(\pi)$.

现在，若令无穷维列向量

$$\boldsymbol{\sigma}(t)=(\cdots,\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t-1),\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t),\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t+1),\cdots)^{\mathrm{T}},$$

则 MRE 式(7.2) 可表示为

$$\boldsymbol{\sigma}(t)=\boldsymbol{L}\boldsymbol{\sigma}(2t),$$

其中，$\boldsymbol{L}$ 是双无限分块矩阵(亦称为 Hurwitz 矩阵)，即

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}\ddots & & & & & & & & & \\ \cdots & \boldsymbol{H}_3 & \boldsymbol{H}_2 & \boldsymbol{H}_1 & \boldsymbol{H}_0 & \cdots & & & & \\ & & \cdots & \boldsymbol{H}_3 & \boldsymbol{H}_2 & \boldsymbol{H}_1 & \boldsymbol{H}_0 & \cdots & & \\ & & & & \cdots & \boldsymbol{H}_3 & \boldsymbol{H}_2 & \boldsymbol{H}_1 & \boldsymbol{H}_0 & \cdots \\ & & & & & & & & & \ddots\end{pmatrix},$$

称之为**多尺度函数 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的两尺度矩阵**.

我们可以看到，结论(2),(4),(6) 和(7) 中的行向量都是 $\boldsymbol{L}$ 的特征值 2^{-j} 对应的特征向量 $\boldsymbol{y}^{(j)}$，令 $\boldsymbol{y}^{(j)}=(\cdots,\boldsymbol{y}_{-1}^{(j)},\boldsymbol{y}_0^{(j)},\boldsymbol{y}_1^{(j)},\cdots)$，其中 $\boldsymbol{y}_l^{(j)}$ 是 $1\times r$ 矩阵，定义

$$F_j(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{y}_k^{(j)}\boldsymbol{\varphi}(t-k)=\boldsymbol{y}^{(j)}\boldsymbol{\sigma}(t),$$

则由 MRE 式(7.2)，得到

$$F_j(t)=\boldsymbol{y}^{(j)}\boldsymbol{\sigma}(t)=\boldsymbol{y}^{(j)}\boldsymbol{L}\boldsymbol{\sigma}(2t)=2^{-j}\boldsymbol{y}^{(j)}\boldsymbol{\sigma}(2t)=2^{-j}F_j(2t).$$

可以证明，此时 $F_j=Ct^j$，C 是某个常数，即结论(4) 成立.

这里的特征向量 $\boldsymbol{y}^{(j)}$ 必须满足一定的性质，因为

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{y}_{n+l}^{(j)}\boldsymbol{\varphi}(t+n)&=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{y}_n^{(j)}\boldsymbol{\varphi}(t-l+n)\\&=(t-l)^j=\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}t^k(-l)^{j-k}\\&=\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(-l)^{j-k}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{y}_n^{(k)}\boldsymbol{\varphi}(t+n),\end{aligned}$$

令两边的系数相等，并取 $n=0$，立即得到特征向量 $\boldsymbol{y}^{(j)}$ 之间的关系：

$$\boldsymbol{y}_l^{(j)}=\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(-l)^{j-k}\boldsymbol{y}_0^{(k)}.$$

这就是式(7.21). 这个关系说明了无穷维向量 $\boldsymbol{y}^{(j)}$ 由有限个分量为 r 的向量 $\boldsymbol{y}_0^{(0)},\boldsymbol{y}_0^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}_0^{(j)}$ 来确定.

对于单小波 $\psi(t)$，若 $\psi(t)$ 具有 m 阶消失矩，则有分解式

$$H(\omega)=\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2}\right)^m Q_0(\omega),$$

其中 $Q_0(\omega)$ 满足 $Q_0(0)=1$，$Q_0(2k\pi)\neq 0$，$k\in\mathbf{Z}\backslash\{0\}$.

具有 m 阶消失矩的多小波是否有与单小波类似的分解式呢? 我们来看看下面的定理.

定理7.11 设 $\boldsymbol{\varphi}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_r(t))^{\mathrm{T}}\in L^2(\mathbf{R})^r$ 是紧支 L^2 稳定的，$\boldsymbol{\psi}(t)$ 是对应的多小波，$\{\boldsymbol{H}(\omega),\boldsymbol{G}(\omega)\}$ 是对应的频率响应，$\boldsymbol{\psi}(t)$ 具有 m

阶消失矩，则 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 能进行 m 次 TSST 分解：

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\frac{1}{2^m}\boldsymbol{M}_{m-1}(2\omega)\cdots\boldsymbol{M}_0(2\omega)\boldsymbol{Q}(\omega)\boldsymbol{M}_0^{-1}(\omega)\cdots\boldsymbol{M}_{m-1}^{-1}(\omega),\quad(7.26)$$

这里，$\boldsymbol{Q}(\omega)$ 是一个矩阵三角多项式；相似变换矩阵 $\boldsymbol{M}_i(i=0,1,\cdots,m-1)$ 满足条件：

(1) 对所有 $\omega\neq 0$，$\boldsymbol{M}_i(\omega)$ 可逆；

(2) $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(\det\boldsymbol{M}_i(\omega))\right|_{\omega=0}\neq 0$；

(3) $\boldsymbol{M}_i(0)$ 有单特征值 0，且存在对应的右特征向量 $\boldsymbol{r}_i$，使

$$\boldsymbol{M}_i(0)\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{0}.$$

令 $\boldsymbol{M}(\omega)=\boldsymbol{M}_{m-1}(\omega)\boldsymbol{M}_{m-2}(\omega)\cdots\boldsymbol{M}_0(\omega)$，则 $\boldsymbol{M}(\omega)$ 满足：

$$\det\boldsymbol{M}(\omega)=c(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})^m.$$

事实上

$$\det\boldsymbol{H}(\omega)=\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2^r}\right)^m\det\boldsymbol{Q}(\omega).$$

我们指出，$\boldsymbol{H}(\omega)$ 的TSST分解式(7.26)不是唯一的. 此外，从式(7.26)可以看出，每作一次 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 的 TSST 分解，实际上是确定 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 的一个消失矩，因此只要能找到相似变换矩阵 $\boldsymbol{M}(\omega)$，对 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 作一次 TSST 变换，则 $\widetilde{\boldsymbol{H}}(\omega)$ 比 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 高一阶消失矩.

7.2.3 多小波的正则性

我们知道，紧支正交多小波可以表示为多尺度函数的有限组合，所以多尺度函数和多小波具有相同的正则性. 这里仅讨论多尺度函数的正则性.

定义 7.7 设 $\boldsymbol{\varphi}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_r(t))^{\mathrm{T}}\in L^2(\mathbf{R})^r$，称多尺度函数 $\boldsymbol{\varphi}(t)\in C^d(\mathbf{R})^r$，如果

$$d=n+\alpha,\ n\in\mathbf{Z}^+,\ 0\leqslant\alpha<1,\quad \boldsymbol{\varphi}(t)\in C^n(\mathbf{R})^r,$$

且 $\boldsymbol{\varphi}^{(n)}(t)$ 是一致Hölder 连续的，即

$$|D^\beta\varphi_\nu(t+y)-D^\beta\varphi_\nu(t)|\leqslant C|y|^\alpha,\quad |\beta|=n,\ 1\leqslant\nu\leqslant r.$$

可以证明：如果 $\boldsymbol{\varphi}(t)\in C^d(\mathbf{R})^r$，$s_0$ 为 **Sobolev 指数**，即

$$s_0=\sup\left\{s\geqslant 0\,\middle|\,\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|\omega|^2)^s\|\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)\|^2\mathrm{d}\omega<+\infty\right\},$$

那么 $d\geqslant s_0-\frac{1}{2}$.

对于单小波 $\psi(t)$，文献[50]给出了估计 $\psi(t)$ 的 Sobolev 指数的方法：

设尺度函数 $\varphi(t)$ 是紧支稳定的，具有 m 阶消失矩，对应的尺度符号 $H(\omega)$ 可分解为

$$H(\omega)=\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2}\right)^m Q(\omega),$$

其中 $Q(\omega)$ 是一个三角多项式，且

$$Q(0)=1,\quad Q(2k\pi)\neq 0,\ k\in \mathbf{Z}\backslash\{0\}.$$

则可用以下两种等价的方法来估计 Sobolev 指数：

(1) $s_0=m-\log_4\rho(T_Q)$，其中 $\rho(T_Q)$ 是 $Q(\omega)$ 的变换算子 T_Q 的谱半径，$T_Q\in M_N$；

(2) 设 H_N^0 是空间 M_N 上算子 T_H 的最小不变子空间，算子 T_H 在子空间 H_N^0 上的限制记为 T_H^0，其谱半径 $\rho(T_H^0)<1$，则

$$s_0=-\log_4\rho(T_H^0).$$

显然，小波的正则性与其消失矩阶数有很强的相关性.

对于多小波，我们也有类似的结论(见文献[90])：

定理7.12 设 $\boldsymbol{\varphi}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_r(t))^{\mathrm{T}}\in L^2(\mathbf{R})^r$ 是紧支正交 L^2 稳定的，$\boldsymbol{\psi}(t)$ 是对应的具有 m 阶消失矩的多小波，$\{\boldsymbol{H}(\omega),\boldsymbol{G}(\omega)\}$ 是对应的频率响应，$\boldsymbol{H}(\omega)$ 有形如式(7.26)的分解，即

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\frac{1}{2^m}\boldsymbol{M}(2\omega)\boldsymbol{Q}(\omega)\boldsymbol{M}^{-1}(\omega).$$

又设 $T_{\boldsymbol{H}}$ 和 $T_{\boldsymbol{Q}}$ 分别是 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 和 $\boldsymbol{Q}(\omega)$ 在空间 M_N 上的变换矩阵；令 ρ_0 和 ρ_1 分别是 $T_{\boldsymbol{H}}$ 与 $T_{\boldsymbol{Q}}$ 限制在 H_N^0 上的谱半径，则 $\{\boldsymbol{\varphi}(t),\boldsymbol{\psi}(t)\}$ 有如下等价的 Sobolev 指数估计：

(1) $s_0=m-\log_4\rho_1$；

(2) $s_0=-\log_4\rho_0$.

7.2.4 多小波的对称性

对于实的单小波，除 Haar 小波外，所有紧支正交小波都是非对称的. 为了满足小波的对称性，人们做了大量的工作，归纳起来大致有如下两大类方法：

(1) 在构造 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 时，使用某些技巧，使 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 具有较少的非对称性. 例如，选择不同的根，使两尺度符号 $H(\omega)$ 更接近线性相位(从而得到了近似对称的正交紧支小波 Symlet 系列)；或提高 $\varphi(t)$ 的消失矩阶数，使 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 获得较好的对称性(从而得到了 Coiflet 小波系列).

(2) 放弃 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 的某些特性，获得严格意义下的对称. 例如，放弃 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是实的，构造复对称紧支小波；或放弃 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 的正交性，构造双正交小波.

由于多小波由两个或两个以上的函数来构成基本小波，在形式上有更灵活的选择，因而可以保证在不放弃其他特性的基础上，构造紧支对称的正交多小波.

定义 7.8 设 $\boldsymbol{\varphi}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_r(t))^{\mathrm{T}}\in L^2(\mathbf{R})^r$，如果每一个 $\varphi_\nu(t)$ 是对称或反对称的，即

$$\varphi_\nu(t)=\pm\varphi_\nu(2T_\nu-t),\quad \nu=1,2,\cdots,r,$$

或 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 在频率域上可表示为 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)=\boldsymbol{E}(\omega)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(-\omega)$，其中

$$\boldsymbol{E}(\omega)=\mathrm{diag}(\pm\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2T_1\omega},\pm\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2T_2\omega},\cdots,\pm\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2T_r\omega}),$$

则称 $\boldsymbol{\varphi}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_r(t))^{\mathrm{T}}\in L^2(\mathbf{R})^r$ 是对称的. 这里，T_ν 是 $\varphi_\nu(t)$ 的对称或反对称点，$\nu=1,2,\cdots,r$.

由定义 7.8 可推出如下的充分必要条件.

定理7.13 $\boldsymbol{\varphi}(t)\in L^2(\mathbf{R})^r$ 是对称的，当且仅当矩阵两尺度符号 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 满足:

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\boldsymbol{E}(2\omega)\boldsymbol{H}(-\omega)\boldsymbol{E}^{-1}(\omega).$$

对称点与支集有关，在假设 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的每个分量的支集都相等的情况下，我们得到下面的定理.

定理7.14 设紧支多尺度函数 $\boldsymbol{\varphi}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_r(t))^{\mathrm{T}}$ 满足矩阵两尺度方程(7.5)，且

$$\mathrm{supp}\,\varphi_1=\mathrm{supp}\,\varphi_2=\cdots=\mathrm{supp}\,\varphi_r=[0,N],$$

$\varphi_\nu(t)$ $(1\leqslant\nu\leqslant r)$ 是对称或反对称的，则

$$\boldsymbol{H}_k=\boldsymbol{S}_r\boldsymbol{H}_{N-k}\boldsymbol{S}_r\quad(0\leqslant k\leqslant N),$$

其中 $\boldsymbol{S}_r$ 是 $r\times r$ 对角矩阵，即

$$\boldsymbol{S}_r(i,j)=\begin{cases}1, & i=j\text{ 且 }\varphi_i\text{ 是对称的},\\ -1, & i=j\text{ 且 }\varphi_i\text{ 是反对称的},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\tag{7.27}$$

证 因为 $\varphi_\nu(t)$ $(1\leqslant\nu\leqslant r)$ 是对称或反对称的，故

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{S}_r\boldsymbol{\varphi}(N-t),\tag{7.28}$$

这里 $\boldsymbol{S}_r$ 由式(7.27) 确定，显然 $\boldsymbol{S}_r=\boldsymbol{S}_r^{-1}$. 又由式(7.5) 得到

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{\varphi}(2t-k)=\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{H}_{N-k}\boldsymbol{\varphi}(2t-N+k),$$

将式(7.28)代入，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(N-t) &= \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{S}_r \boldsymbol{H}_{N-k} \boldsymbol{S}_r \boldsymbol{\varphi}(N-2t+N-k) \\ &= \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{S}_r \boldsymbol{H}_{N-k} \boldsymbol{S}_r \boldsymbol{\varphi}(2(N-t)-k),\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{S}_r \boldsymbol{H}_{N-k} \boldsymbol{S}_r \boldsymbol{\varphi}(2t-k).$$

再与式(7.5)进行比较即得

$$\boldsymbol{H}_k = \boldsymbol{S}_r \boldsymbol{H}_{N-k} \boldsymbol{S}_r \quad (0 \leqslant k \leqslant N).$$ ∎

在应用中经常考虑的是 $r=2$ 的情形，此时 $\boldsymbol{\varphi}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t))^{\mathrm{T}}$，不妨设 $\varphi_1(t)$ 是对称的，$\varphi_2(t)$ 是反对称的，考虑偶数长度的低通滤波器(对奇数长度的低通滤波器可同理讨论)，则

$$\boldsymbol{H}_k = \boldsymbol{S}\boldsymbol{H}_{2N-k-1}\boldsymbol{S}, \quad k=0,1,\cdots,2N-1;\ \boldsymbol{S}=\mathrm{diag}(1,-1) \tag{7.29}$$

等价于

$$\boldsymbol{H}(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2N-1)\omega}\boldsymbol{S}\boldsymbol{H}(-\omega)\boldsymbol{S}.$$

由定理 7.13 知，$\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是对称的多尺度函数.

定义 7.9 设 $\boldsymbol{\psi}(t)=(\psi_1(t),\psi_2(t))^{\mathrm{T}}$ 是二重多小波，其低通滤波器 $\{\boldsymbol{H}_k\}$ 满足式(7.29)，则称 $\boldsymbol{\psi}(t)$ **具有插值型对称性**.

大多数构造的多小波都具有插值型对称，例如 CL 多小波，STT 多小波，Jiang 多小波，等等.

7.2.5 多小波的短支集特性

支集长度对小波变换的影响不仅仅是增加计算量的问题. 设输入信号 $f(t)$ 在 t_0 点有一个孤立奇异点，且 t_0 包含在 $\boldsymbol{\psi}_{jk}(j,k\in\mathbf{Z})$ 的支撑区间内，则小波系数可能在这一点有较大的值；如果 $\boldsymbol{\psi}$ 的支集长度是 $N+1$，那么在尺度 2^j 上就有 $N+1$ 个支撑区间包含点 t_0 的小波 $\boldsymbol{\psi}_{jk}$. 这个数量的增加无疑违背了选择小波基的最优原则，因此我们不仅希望 $\boldsymbol{\psi}$ 是有限支集的，更希望 $\boldsymbol{\psi}$ 有比较短的支集长度.

定义 7.10 多尺度函数 $\boldsymbol{\varphi}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_r(t))^{\mathrm{T}}$ 的**支集**定义为其每个分量的支集之并集，即

$$\mathrm{supp}\,\boldsymbol{\varphi} = \bigcup_{j=1}^{r} \mathrm{supp}\,\varphi_j.$$

对于单尺度函数和单小波，支集 $\mathrm{supp}\,\varphi=[0,N]$ 当且仅当 $\varphi(t)$ 的双尺度

系数 $h_0 h_N \neq 0$. 然而，多小波的支集特性并没有这么简单，我们只能得到如下的结论.

定理7.15 设多尺度函数 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是 MRE 式(7.5)的紧支解，$\text{supp}\boldsymbol{\varphi} \subseteq [0,N]$.

(1) 若 $\boldsymbol{H}_0$ 和 $\boldsymbol{H}_N$ 是可逆的，则 $\text{supp}\boldsymbol{\varphi} = [0,N]$.

(2) 若 $\text{supp}\boldsymbol{\varphi} = [0,N]$，则 $\boldsymbol{H}_0$ 和 $\boldsymbol{H}_N$ 都不是幂零矩阵.

(3) 若 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是 ω - 无关的(即 $\sum_{k\in\mathbf{Z}} \boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}(t-k) = 0$ 蕴含 $\boldsymbol{a}_k^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$, $k \in \mathbf{Z}$)，则 $\text{supp}\boldsymbol{\varphi} = [0,N]$ 当且仅当 $\boldsymbol{H}_0$ 和 $\boldsymbol{H}_N$ 都不是幂零矩阵.

根据上述结论，多小波的支集长度与其矩阵滤波器的个数之间没有必然联系. 正因为如此，我们可以平衡多小波的支集长度和消失矩阶数之间的矛盾，使得多小波的构造具有较大灵活性. 我们知道，若正交单小波 $\psi(t)$ 具有 N 阶消失矩，则支集 $\text{supp}\psi$ 的长度至少为 $2N-1$. 这就意味着提高消失矩阶数与缩短支集长度之间产生了矛盾，给实际应用带来了困难. 从这个意义上讲，Daubechies 小波 $\psi_N(t)$ 倒是具有一定优越性：具有 N 阶消失矩，其支集长度恰好为 $2N-1$. 然而，对于多小波的处理就比较灵活了，我们可以让部分小波分量是短支集的，而让其余小波分量保持消失矩阶数. 例如，GHM 多小波有两个分量，其消失矩阶数是 2，但是

$$\text{supp}\,\varphi_1 = [0,1], \quad \text{supp}\,\varphi_2 = [0,2],$$

这就较好地解决了消失矩阶数和支集长度之间的矛盾.

此外，我们还可以通过增加小波分量的个数来缩短支集长度. 从某种意义上来说，总可以让所有紧支多小波的支集固定为区间$[-1,1]$. 下面的定理说明了这一点.

定理7.16 设$\{V_j\}$是由多尺度函数 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 生成的 MRA^r，$\#\boldsymbol{\varphi} = 2^j r$，其中 $j,r \in \mathbf{Z}^+$，则存在某个正整数 n 和由多尺度函数 $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ 生成的多重多分辨率分析$\{V'_j\}$，$\#\boldsymbol{\varphi}' = 2^{j+n} r$，且 $\text{supp}\boldsymbol{\varphi}' = [-1,1]$，使得

$$V'_j = V_{j+n}, \quad \forall j \in \mathbf{Z}.$$

事实上，根据定理 7.16 还可推知，如果限制多尺度函数 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的所有分量的支集都在$[-1,1]$上，且 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 在$[0,1]$上是 ω - 无关的，则(7.5)式中的 MCQF 的个数只有 4 个：$\boldsymbol{H}_{-2}, \boldsymbol{H}_{-1}, \boldsymbol{H}_0$ 和 $\boldsymbol{H}_1$.

在 MRE 式(7.5)中，N 只能理解为最长的滤波器分量的个数，并且滤波器以矩阵的形式出现，真正作用到信号时的滤波器长度应该是 rN，且各个分量的长度不必相等，应视具体问题作具体分析.

7.3 几个常见的正交多小波

本节仅罗列几个常见的多小波，具体的构造方法详见文献[91]，[210]，更多的例子请参考文献[212]. 为简单起见，每个多小波只给出相应的滤波器.

例 7.2 GHM 多小波，即 Geronimo-Hardin-Massopust 多小波(见文献[68]).

$$\boldsymbol{H}_0=\begin{bmatrix}\frac{3}{5\sqrt{2}} & \frac{4}{5}\\ -\frac{1}{20} & -\frac{3}{10\sqrt{2}}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{H}_1=\begin{bmatrix}\frac{3}{5\sqrt{2}} & 0\\ \frac{9}{20} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{9}{20} & -\frac{3}{10\sqrt{2}}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{H}_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -\frac{1}{20} & 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_0=\begin{bmatrix}-\frac{1}{20} & -\frac{3}{10\sqrt{2}}\\ \frac{1}{10\sqrt{2}} & \frac{3}{10}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}_1=\begin{bmatrix}\frac{9}{20} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{9}{10\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_2=\begin{bmatrix}\frac{9}{20} & -\frac{3}{10\sqrt{2}}\\ \frac{9}{10\sqrt{2}} & -\frac{3}{10}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}_3=\begin{bmatrix}-\frac{1}{20} & 0\\ -\frac{1}{10\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}.$$

基于 GHM 多小波的双正交插值预 - 后滤波器为

$$\boldsymbol{P}_0=\begin{bmatrix}\frac{3}{8\sqrt{2}} & \frac{10}{8\sqrt{2}}\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}\frac{3}{8\sqrt{2}} & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}_0=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\frac{3}{10}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{Q}_1=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{4\sqrt{2}}{5} & -\frac{3}{10}\end{bmatrix}.$$

GHM 多小波是正交、对称和紧支集的，具有 2 阶消失矩和逼近阶.

例 7.3 CL3 多小波，即 Chui-Lian 的长度为 3 的多小波(见文献[36]).

$$H_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$G_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} & \frac{1}{4\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad G_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{4\sqrt{2}} & \frac{1}{4\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

基于 CL3 多小波的双正交插值预 - 后滤波器为

$$P_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{1+\sqrt{7}} & -\frac{1}{1+\sqrt{7}} \end{pmatrix}, \quad Q_0 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1+\sqrt{7}}{2} \\ 2 & -\frac{1+\sqrt{7}}{2} \end{pmatrix}.$$

CL3 多小波是正交、对称和紧支集的，具有 2 阶消失矩和逼近阶.

例 7.4 STT 多小波，即 Shen-Tan-Tham 多小波，又称 **SA4 多小波**(见文献[131],[151]).

$$H_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2+1} & \frac{\alpha}{\alpha^2+1} \\ \frac{1}{\alpha^2+1} & -\frac{\alpha}{\alpha^2+1} \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1} & \frac{\alpha}{\alpha^2+1} \\ -\frac{\alpha^2}{\alpha^2+1} & \frac{\alpha}{\alpha^2+1} \end{pmatrix},$$

$$G_0 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha^2+1} & -\frac{1}{\alpha^2+1} \\ \frac{\alpha}{\alpha^2+1} & \frac{1}{\alpha^2+1} \end{pmatrix}, \quad G_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{\alpha^2+1} & \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1} \\ \frac{\alpha}{\alpha^2+1} & \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}_k = \boldsymbol{S}\boldsymbol{H}_{3-k}\boldsymbol{S}, \quad \boldsymbol{G}_k = \boldsymbol{S}\boldsymbol{G}_{3-k}\boldsymbol{S} \quad (k = 2,3),$$

其中 $\boldsymbol{S} = \mathrm{diag}(1, -1)$. 例如，若取 $\alpha = 4+\sqrt{15}$，则有

$$H_0=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{32+8\sqrt{15}} & \dfrac{1}{8}\\ \dfrac{1}{32+8\sqrt{15}} & -\dfrac{1}{8}\end{bmatrix},\quad H_1=\begin{bmatrix}\dfrac{31+8\sqrt{15}}{32+8\sqrt{15}} & \dfrac{1}{8}\\ -\dfrac{31+8\sqrt{15}}{32+8\sqrt{15}} & \dfrac{1}{8}\end{bmatrix},$$

$$H_2=\begin{bmatrix}\dfrac{31+8\sqrt{15}}{32+8\sqrt{15}} & -\dfrac{1}{8}\\ \dfrac{31+8\sqrt{15}}{32+8\sqrt{15}} & \dfrac{1}{8}\end{bmatrix},\quad H_3=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{32+8\sqrt{15}} & -\dfrac{1}{8}\\ -\dfrac{1}{32+8\sqrt{15}} & -\dfrac{1}{8}\end{bmatrix},$$

$$G_0=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{8} & -\dfrac{1}{32+8\sqrt{15}}\\ \dfrac{1}{8} & \dfrac{1}{32+8\sqrt{15}}\end{bmatrix},\quad G_1=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{8} & \dfrac{31+8\sqrt{15}}{32+8\sqrt{15}}\\ \dfrac{1}{8} & \dfrac{31+8\sqrt{15}}{32+8\sqrt{15}}\end{bmatrix},$$

$$G_2=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{8} & -\dfrac{31+8\sqrt{15}}{32+8\sqrt{15}}\\ -\dfrac{1}{8} & \dfrac{31+8\sqrt{15}}{32+8\sqrt{15}}\end{bmatrix},\quad G_3=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{8} & \dfrac{1}{32+8\sqrt{15}}\\ -\dfrac{1}{8} & \dfrac{1}{32+8\sqrt{15}}\end{bmatrix}.$$

基于 STT 多小波的双正交插值预 - 后滤波器为

$$P_0=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\quad Q_0=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}.$$

STT 多小波是正交、对称和紧支集的，具有 1 阶消失矩和逼近阶.

例 7.5 BiHermite 多小波，即 Hermite 三次样条双正交多小波(见文献[143]).

分析滤波器为

$$H_0=\begin{bmatrix}-\dfrac{73}{648} & \dfrac{77}{324}\\ -\dfrac{773}{3240} & \dfrac{3229}{6480}\end{bmatrix},\quad H_1=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2} & -\dfrac{89}{162}\\ \dfrac{187}{180} & -\dfrac{91}{81}\end{bmatrix},$$

$$H_2=\begin{bmatrix}\dfrac{397}{324} & 0\\ 0 & \dfrac{6091}{3240}\end{bmatrix},\quad H_3=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{89}{162}\\ -\dfrac{187}{180} & -\dfrac{91}{81}\end{bmatrix},$$

$$H_4 = \begin{pmatrix} -\frac{73}{648} & -\frac{77}{324} \\ \frac{773}{3240} & \frac{3229}{6480} \end{pmatrix};$$

$$G_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix},\quad G_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\quad G_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

合成滤波器为

$$\widetilde{H}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix},\quad \widetilde{H}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\quad \widetilde{H}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix};$$

$$\widetilde{G}_0 = \begin{pmatrix} \frac{67}{240} & -\frac{7}{720} \\ \frac{95}{324} & -\frac{1}{162} \end{pmatrix},\quad \widetilde{G}_1 = \begin{pmatrix} -1 & \frac{187}{180} \\ -\frac{89}{81} & \frac{91}{81} \end{pmatrix},\quad \widetilde{G}_2 = \begin{pmatrix} \frac{173}{120} & 0 \\ 0 & \frac{26}{9} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{G}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{187}{180} \\ \frac{89}{81} & \frac{91}{81} \end{pmatrix},\quad \widetilde{G}_4 = \begin{pmatrix} \frac{67}{240} & \frac{7}{720} \\ -\frac{95}{324} & -\frac{1}{162} \end{pmatrix}.$$

基于 BiHermite 的双正交插值预 - 后滤波器

$$P_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},\quad Q_0 = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

BiHermite 多小波是双正交、对称和紧支集的，具有 2 阶消失矩和逼近阶.

7.4 正交多小波的 Mallat 算法

7.4.1 多小波分解与重构算法

现在，我们讨论如何应用多小波实现信号的分解和重构(即多小波的 Mallat 算法). 设 $f(t) \in V_J$，则

$$f(t) = \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{k\in \mathbf{Z}} c_{Jk}^{\nu} \varphi_{Jk}^{\nu}(t)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{J_0,k}^{\nu} \varphi_{J_0,k}^{\nu}(t) + \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{J_0 \leqslant j \leqslant J} \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_{jk}^{\nu} \psi_{jk}^{\nu}(t),$$

这里 $J_0 < J$，且

$$c_{jk}^{\nu} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi_{jk}^{\nu}(t) \mathrm{d}t, \quad d_{jk}^{\nu} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{jk}^{\nu}(t) \mathrm{d}t.$$

又设多尺度函数 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 与多小波 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 满足 MRE 式(7.2)，即

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varphi}(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{\varphi}(2t - k), \\ \boldsymbol{\psi}(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \boldsymbol{G}_k \boldsymbol{\varphi}(2t - k), \end{cases} \tag{7.30}$$

其中

$$\boldsymbol{H}_k = (h_{\mu,kr+v})_{1 \leqslant \mu,v \leqslant r}, \quad \boldsymbol{G}_k = (g_{\mu,kr+v})_{1 \leqslant \mu,v \leqslant r}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

均为 $r \times r$ 数量矩阵. 尺度函数 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 和小波函数 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 在下面的意义下正交：

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\mu(t) \varphi_v(t-k) \mathrm{d}t = \delta_{\mu v} \delta_{0k}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\mu(t) \psi_v(t-k) \mathrm{d}t = \delta_{\mu v} \delta_{0k}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\mu(t) \psi_v(t-k) \mathrm{d}t = 0. \end{cases}$$

下面，导出相应于正交多小波的分解与重构算法. 为此，定义正交投影算子

$$\begin{cases} P_j: L^2(\mathbf{R}) \to V_j,\ P_j f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{\mu=1}^{r} \langle f, \varphi_{jk}^{\mu} \rangle \varphi_{jk}^{\mu} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{\mu=1}^{r} c_{jk}^{\mu} \varphi_{jk}^{\mu}, \\ Q_j: L^2(\mathbf{R}) \to W_j,\ Q_j f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{\mu=1}^{r} \langle f, \psi_{jk}^{\mu} \rangle \psi_{jk}^{\mu} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{\mu=1}^{r} d_{jk}^{\mu} \psi_{jk}^{\mu}, \end{cases} \tag{7.31}$$

其中

$$\varphi_{jk}^{\mu}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi_\mu(2^j t - k), \quad \psi_{jk}^{\mu}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi_\mu(2^j t - k).$$

对 $j, k \in \mathbf{Z}$, 记 $c_{jk}^{\mu} = \langle f, \varphi_{jk}^{\mu} \rangle$，$d_{jk}^{\mu} = \langle f, \psi_{jk}^{\mu} \rangle$，则由 MRE 式(7.30)，有

$$\begin{aligned} \varphi_{jk}^{\nu}(t) &= 2^{\frac{j}{2}} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \sum_{\mu=1}^{r} h_{v,pr+\mu} \varphi_\mu(2(2^j t - k) - p) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \sum_{\mu=1}^{r} h_{v,pr+\mu} 2^{\frac{j+1}{2}} \varphi_\mu(2^{j+1} t - 2k - p) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \sum_{\mu=1}^{r} h_{v,pr+\mu} \varphi_{j+1,2k+p}^{\mu}(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \sum_{\mu=1}^{r} h_{v,(p-2k)r+\mu} \varphi_{j+1,p}^{\mu}(t). \end{aligned}$$

同理，有

$$\psi_{jk}^{v}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}\sum_{\mu=1}^{r}g_{v,(p-2k)r+\mu}\varphi_{j+1,p}^{\mu}(t).$$

从而可以建立分解公式

$$\begin{aligned}c_{jk}^{v}&=\langle f,\varphi_{jk}^{v}\rangle=\langle f,\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}\sum_{\mu=1}^{r}h_{v,(p-2k)r+\mu}\varphi_{j+1,p}^{\mu}\rangle\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}\sum_{\mu=1}^{r}\overline{h_{v,(p-2k)r+\mu}}\langle f,\varphi_{j+1,p}^{\mu}\rangle\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}\sum_{\mu=1}^{r}\overline{h_{v,(p-2k)r+\mu}}c_{j+1,p}^{\mu}.\end{aligned}$$

同理有

$$d_{jk}^{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}\sum_{\mu=1}^{r}\overline{g_{v,(p-2k)r+\mu}}c_{j+1,p}^{\mu}.$$

反过来，有重构公式

$$\begin{aligned}c_{j+1,k}^{v}&=\langle f,\varphi_{j+1,k}^{v}\rangle=\langle P_jf+Q_jf,\varphi_{j+1,k}^{v}\rangle\\&=\langle P_jf,\varphi_{j+1,k}^{v}\rangle+\langle Q_jf,\varphi_{j+1,k}^{v}\rangle\\&=\langle\sum_{p\in\mathbf{Z}}\sum_{\mu=1}^{r}c_{jp}^{\mu}\varphi_{j,p}^{\mu},\varphi_{j+1,k}^{v}\rangle+\langle\sum_{p\in\mathbf{Z}}\sum_{\mu=1}^{r}d_{jp}^{\mu}\psi_{j,p}^{\mu},\varphi_{j+1,k}^{v}\rangle\\&=\langle\sum_{p\in\mathbf{Z}}\sum_{\mu=1}^{r}c_{jp}^{\mu}\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m\in\mathbf{Z}}\sum_{\gamma=1}^{r}h_{\mu,(m-2p)r+\gamma}\varphi_{j+1,m}^{\gamma},\varphi_{j+1,k}^{v}\rangle\\&\quad+\langle\sum_{p\in\mathbf{Z}}\sum_{\mu=1}^{r}d_{jp}^{\mu}\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m\in\mathbf{Z}}\sum_{\gamma=1}^{r}g_{\mu,(m-2p)r+\gamma}\varphi_{j+1,m}^{\gamma},\varphi_{j+1,k}^{v}\rangle\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}\sum_{\mu=1}^{r}h_{\mu,(k-2p)r+v}c_{jp}^{\mu}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}\sum_{\mu=1}^{r}g_{\mu,(k-2p)r+v}d_{jp}^{\mu}.\end{aligned}$$

从而下面结果成立.

定理7.17 设正交投影算子 P_j,Q_j 的定义如(7.31)式，则有下面的 Mallat 快速算法.

(1) 分解算法：

$$\begin{cases}c_{jk}^{v}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\sum_{p\in\mathbf{Z}}\sum_{\mu=1}^{r}\overline{h_{v,(p-2k)r+\mu}}c_{j+1,p}^{\mu},\\[2ex] d_{jk}^{v}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\sum_{p\in\mathbf{Z}}\sum_{\mu=1}^{r}\overline{g_{v,(p-2k)r+\mu}}c_{j+1,p}^{\mu}.\end{cases}\tag{7.32}$$

(2) 重构算法：

$$c_{j+1,k}^{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}\sum_{\mu=1}^{r}h_{\mu,(k-2p)r+v}c_{jp}^{\mu}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\in\mathbf{Z}}\sum_{\mu=1}^{r}g_{\mu,(k-2p)r+v}d_{jp}^{\mu}. \tag{7.33}$$

我们把分解与重构公式写成矩阵形式. 令

$$\boldsymbol{c}_{jk}=(c_{jk}^{1},c_{jk}^{2},\cdots,c_{jk}^{r})^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{d}_{jk}=(d_{jk}^{1},d_{jk}^{2},\cdots,d_{jk}^{r})^{\mathrm{T}},$$

则有如下的分解公式：

$$\begin{cases}\boldsymbol{c}_{jk}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\sum_{p\in\mathbf{Z}}\overline{\boldsymbol{H}_{p}}\boldsymbol{c}_{j+1,2k+p},\\ \boldsymbol{d}_{jk}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\sum_{p\in\mathbf{Z}}\overline{\boldsymbol{G}_{p}}\boldsymbol{c}_{j+1,2k+p}\end{cases} \tag{7.34}$$

和重构公式：

$$\boldsymbol{c}_{j+1,p}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}(\boldsymbol{H}_{k}\boldsymbol{c}_{j,2k+p}+\boldsymbol{G}_{k}\boldsymbol{d}_{j,2k+p}). \tag{7.35}$$

因此，只要确定了 $\boldsymbol{c}_{Jk}$(这里，J 是初始阶，即逼近子空间 V_J 的阶数)，就能用上面的 Mallat 算法进行多小波的分解和重构.

7.4.2 预处理和后处理

多小波分解算法要求有初始系数 $\boldsymbol{c}_{Jk}$，而通常的输入数据是信号(或函数)$f(t)$ 的等距采样值，这就需要将 $f(t)$ 的采样值转化成$\{\boldsymbol{c}_{Jk}\}$. 我们把这个转化过程称为**预处理**或**预滤波**. 经过多小波重构后，需要把$\{\boldsymbol{c}_{Jk}\}$再转化为函数值，这个过程称为**后处理**或**后滤波**. 如果希望实现精确重构，那么后处理必须是预处理的逆过程.

为了表示简洁起见，假定初始阶 $J=0$，并且假定信号的采样点为

$$t_{kj}=k+\frac{j-1}{r},\quad j=1,2,\cdots,r.$$

这就是说，若 $f(t)\in V_0$ 是原始信号在 V_0 中的近似，则

$$f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\sum_{\nu=1}^{r}c_{0k}^{\nu}\varphi_{\nu}(t-k)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{c}_{0k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}(t-k),$$

特别，有

$$f(t_{kj})=\sum_{l\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{c}_{0k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}(t_{kj}-l),\quad j=1,2,\cdots,r. \tag{7.36}$$

其中，$\boldsymbol{c}_{0k}=(c_{0k}^{1},c_{0k}^{2},\cdots,c_{0k}^{r})^{\mathrm{T}}$ 是初始输入系数向量.

预滤波方法有很多(见文献[91])，这里我们仅讨论两种典型方法.

1. 插值预滤波

这种方法保持逼近阶，但不能保持正交性，文献[169]有比较详细的论述.

对于给定的多小波系统，因为$\boldsymbol{\varphi}(t)$的支撑性，所以(7.36)式中的和式是有限项. 若记

$$\boldsymbol{\sigma}_k=\left(f(k),f\left(k+\frac{1}{r}\right),\cdots,f\left(k+\frac{r-1}{r}\right)\right)^{\mathrm{T}},$$

则(7.36)式可用矩阵表示为

$$\boldsymbol{\sigma}_k=(a_{ij})_k\boldsymbol{c}_{0k},$$

其中

$$a_{ij}=\sum_{l\in\mathbf{Z}}\varphi_j\left(k+\frac{i-1}{r}-l\right),\quad i,j=1,2,\cdots,r.$$

如果$(a_{ij})_k$是可逆矩阵，那么$\boldsymbol{c}_{0k}=(a_{ij})_k^{-1}\boldsymbol{\sigma}_k$. 这就是说，$\boldsymbol{c}_{0k}$的每一个分量都是采样值的线性组合. 我们称$r\times r$矩阵$(a_{ij})_k^{-1}$为长度等于1的预滤波器.

由于现有的多小波大都是2重的，所以我们下面的讨论一般都假定$r=2$. 此时，如果

$$\boldsymbol{c}_{0k}=\sum_{m=0}^{L}\boldsymbol{P}_m\begin{pmatrix}f(m+k)\\ f\left(m+k+\frac{1}{2}\right)\end{pmatrix},$$

那么$\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_L$就是长度为$L+1$的预滤波器.

例 7.6 考虑GHM多小波，其多尺度函数$\boldsymbol{\varphi}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t))^{\mathrm{T}}$，其中

$$\operatorname{supp}\varphi_1=[0,1],\quad \operatorname{supp}\varphi_2=[0,2],$$

在整数和半整数点的非零函数值仅有

$$\varphi_1\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4\sqrt{6}}{5},\quad \varphi_2\left(\frac{1}{2}\right)=\varphi_2\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{10},\quad \varphi_2(1)=\sqrt{3}.$$

此时，由(7.36)式可得

$$f(k)=\varphi_2(1)c_{0,k-1}^2=\sqrt{3}c_{0,k-1}^2,$$

$$\begin{aligned}f\left(k+\frac{1}{2}\right)&=\varphi_1\left(\frac{1}{2}\right)c_{0k}^1+\varphi_2\left(\frac{1}{2}\right)c_{0k}^2+\varphi_2\left(\frac{3}{2}\right)c_{0,k-1}^2\\&=\frac{4\sqrt{6}}{5}c_{0k}^1-\frac{3}{10}f(k+1)-\frac{3}{10}f(k),\end{aligned}$$

或逆向地，有

$$c_{0k}^1=\frac{1}{8\sqrt{6}}\left(3f(k)+10f\left(k+\frac{1}{2}\right)+3f(k+1)\right),$$

$$c_{0k}^2=\frac{1}{\sqrt{3}}f(k+1),$$

其中，c_{0k}^1, c_{0k}^2 是二维向量 $\boldsymbol{c}_{0k}$ 的两个分量. 因此，GHM 多小波的预滤波器为

$$\boldsymbol{P}_0 = \frac{1}{8\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_1 = \frac{1}{8\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

预滤波的思想是改变输入信号，将其投影到多小波子空间上，使得输入的 p（$p<m$，其中 m 即多小波消失矩阶数）阶多项式转换成多小波的特征信号，而这些特征信号经过多小波分解后，保持信号的低通和高通特性，至少对常数序列能够保持 1 阶低通和高通特性.

例 7.7 续上例. 对于 GHM 多小波，当输入信号是常数 a 时，经过预滤波器的处理后，得

$$\boldsymbol{c}_{0k} = (\boldsymbol{P}_0 + \boldsymbol{P}_1)\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \frac{1}{8\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}a \\ a \end{pmatrix}.$$

利用多小波分解公式(7.34)，得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}_{-1,k} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2 + \boldsymbol{H}_3)\boldsymbol{c}_{0k} \\ &= \frac{1}{5\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}a \\ a \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}a \\ a \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{d}_{-1,k} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{G}_0 + \boldsymbol{G}_1 + \boldsymbol{G}_2 + \boldsymbol{G}_3)\boldsymbol{c}_{0k} \\ &= \frac{1}{5\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

可见，$\boldsymbol{c}_{0k}$ 是 GHM 的特征信号，并且 $\boldsymbol{c}_{0k}$ 经过多小波低通滤波后保持不变(其实也可以相差一常数因子)，而经过多小波高通滤波后得到零向量. 这就说明例 7.6 所构造的预滤波器能够使 GHM 多小波具有低通和高通特性.

2. Hardin-Roach 预滤波

这种预滤波可以同时保持正交性和逼近阶.

现在，我们假设预处理是线性滤波，即

$$\boldsymbol{c}_k = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \boldsymbol{Q}_{k-l}\boldsymbol{\sigma}_l$$

或

$$\boldsymbol{c}(\omega) = \boldsymbol{Q}(\omega)\boldsymbol{\sigma}(\omega). \tag{7.37}$$

如果 $\boldsymbol{Q}(\omega)$ 是一个仿酉矩阵，那么这是一个正交变换.

一个 p 阶拟插值预滤波器对所有次数不大于 $p-1$ 的多项式都可以产生正确的展开系数. 对于信号 t^n，点抽样具有形式

$$\boldsymbol{\sigma}_k = \sum_{l=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix} k^{n-l} \boldsymbol{e}_l, \tag{7.38}$$

其中

$$\boldsymbol{e}_l = \frac{1}{\sqrt{r}}\left(\left(\frac{0}{r}\right)^l, \left(\frac{1}{r}\right)^l, \cdots, \left(\frac{r-1}{r}\right)^l\right)^{\mathrm{T}}.$$

对于 $\boldsymbol{c}_{0k}$，其展开式为

$$\boldsymbol{c}_{0k} = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} k^{n-l} \boldsymbol{y}_l, \tag{7.39}$$

这里，$\boldsymbol{y}_l$ 是逼近向量.

把式(7.38) 与(7.39) 代入式(7.37)，得到 $\boldsymbol{Q}(\omega)$ 满足的条件：

当 $p = 1$ 时，有

$$\boldsymbol{Q}(0)\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{y}_0. \tag{7.40}$$

这总可以利用常数正交矩阵实现.

当 $p = 2$ 时，有

$$\boldsymbol{Q}(0)\boldsymbol{e}_1 - \mathrm{i}\boldsymbol{Q}'(0)\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{y}_1. \tag{7.41}$$

可以证明(见文献[91])：只要 $\boldsymbol{Q}(\omega)$ 的次数充分高，预滤波器的逼近阶就能达到任意高.

例 7.8 对于DGHM多尺度函数，有两个满足方程(7.40) 并保持1阶逼近阶的精确常数矩阵 $\boldsymbol{Q}$，即

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad 和 \quad \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} & -1+\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

如果要保持 2 阶逼近阶，那么只需 $\boldsymbol{Q}(\omega)$ 包含三个系数并且满足方程(7.41)，此时有 6 个解，详见文献[91] 及其所引参考文献.

一个保持 p 阶逼近阶的预滤波器把任何次数不高于 $p-1$ 次的多项式的点抽样转换成一个多项式的真正展开系数，这个多项式与转换前的多项式具有相同首项相同次数但不一定是同一个多项式. 这在实际应用中足以能够达到很好的结果.

当 $p = 2$ 时，方程(7.41) 可由下式取代，即对于某些 α，有

$$\boldsymbol{Q}(0)\boldsymbol{e}_1 - \mathrm{i}\boldsymbol{Q}'(0)\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{y}_1 + \alpha \boldsymbol{y}_0,$$

而方程(7.40) 保持不变.

保持逼近阶不变的预滤波器可以比拟插值预滤波器的长度更短.

7.4.3 平衡多小波

实际上，在进行多小波变换之前预处理过程也是可以避免的，这只需选取平衡多小波即可. 为了介绍平衡多小波，我们先引进两个重要算子.

定义 7.11 对于 r 重紧支正交多小波系统(7.5)，即

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varphi}(t) = \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{\varphi}(2t-k), \\ \boldsymbol{\psi}(t) = \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{G}_k \boldsymbol{\varphi}(2t-k),\end{cases} \tag{7.42}$$

构造如下分块 Toeplitz 矩阵：

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \cdots & & & & & & & & \\ & \boldsymbol{H}_0 & \boldsymbol{H}_1 & \boldsymbol{H}_2 & \boldsymbol{H}_3 & \cdots & & & \\ & & & \boldsymbol{H}_0 & \boldsymbol{H}_1 & \boldsymbol{H}_2 & \boldsymbol{H}_3 & \cdots & \\ & & & & & \boldsymbol{H}_0 & \boldsymbol{H}_1 & \boldsymbol{H}_2 & \boldsymbol{H}_3 & \cdots \\ & & & & & & & & & \cdots \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} \cdots & & & & & & & & \\ & \boldsymbol{G}_0 & \boldsymbol{G}_1 & \boldsymbol{G}_2 & \boldsymbol{G}_3 & \cdots & & & \\ & & & \boldsymbol{G}_0 & \boldsymbol{G}_1 & \boldsymbol{G}_2 & \boldsymbol{G}_3 & \cdots & \\ & & & & & \boldsymbol{G}_0 & \boldsymbol{G}_1 & \boldsymbol{G}_2 & \boldsymbol{G}_3 & \cdots \\ & & & & & & & & & \cdots \end{bmatrix},$$

称 $\boldsymbol{L},\boldsymbol{W}$ 分别为多小波系统(7.42) 的**低通滤波算子**与**高通滤波算子**.

定义 7.12 称正交多小波系统(7.42) 是 p **阶平衡的**，如果低通滤波算子 $\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$ 保持向量 $\boldsymbol{u}_0$ 与 $\boldsymbol{u}_n$，即

当 $p=1$ 时，$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}_0$，其中 $\boldsymbol{u}_0 = (\cdots,1,1,1,\cdots)^{\mathrm{T}}$；

当 $p>1$ 时，$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_n = 2^{-n}\boldsymbol{u}_n\ (n=1,2,\cdots,p-1)$，其中

$$\boldsymbol{u}_n = (\cdots,(-2)^n,(-1)^n,0^n,1^n,2^n,\cdots)^{\mathrm{T}}.$$

对于一阶平衡即 $p=1$ 的情形，根据正交性条件(7.13),(7.16)，有

$$(\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}})\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}\\ \boldsymbol{W}\end{bmatrix} = \boldsymbol{I}, \quad \begin{bmatrix}\boldsymbol{L}\\ \boldsymbol{W}\end{bmatrix}(\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{I}. \tag{7.43}$$

这等价于

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} + \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W} = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{L}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{O}, \quad \boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}. \tag{7.44}$$

因此 $\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}_0$ 蕴含 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}_0$ 且 $\boldsymbol{W}\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{0}$. 这就是说，$\boldsymbol{u}_0$ 在 $\boldsymbol{L}$ 的作用下保持不变而在 $\boldsymbol{W}$ 的作用下被滤为 $\boldsymbol{0}$.

对于 p 阶平衡的情形，类似于 1 阶情形的讨论，有

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}_n = 2^{-n}\boldsymbol{u}_n, \ \boldsymbol{W}\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}, \quad n=1,2,\cdots,p-1. \tag{7.45}$$

这说明，具有多项式结构(次数 $\leqslant p-1$) 的输入信号在 $\boldsymbol{L}$ 的作用下保持不变(至多相差一个常数) 而在 $\boldsymbol{W}$ 的作用下被滤为 $\boldsymbol{0}$.

定理7.18 对于正交多小波系统(7.42)，设 $\boldsymbol{B}(z)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{H}_k z^k$ 与 $\boldsymbol{L}$ 分别是相应的低通 z 变换与滤波算子，则下列命题相互等价：

(1) $\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{u}_0$，即多小波系统是1阶平衡的；

(2) $\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{B}(1)=\boldsymbol{e}_r$ 且 $\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{B}(-1)=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{e}_r=(1,1,\cdots,1)$ 是分量全为1的 r 维行向量；

(3) $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(0)=\boldsymbol{e}_r^{\mathrm{T}}$；

(4) $\mu(z)=\sum_{\nu=0}^{r-1}m_\nu(z)$ 有零点 $z_k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\frac{k}{r}}$，$k=1,2,\cdots,2r-1$，且 $\mu(1)=2r$，这里，$m_\nu(z)$ 是 $\boldsymbol{B}(z)$ 的多相位分量，即

$$\begin{bmatrix} m_0(z)\\ m_1(z)\\ \vdots\\ m_{r-1}(z)\end{bmatrix}=2\boldsymbol{B}(z^r)\begin{bmatrix}1\\ z^{-1}\\ \vdots\\ z^{-(r-1)}\end{bmatrix}. \tag{7.46}$$

证 采用循环证明：(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(1).

(1)⇒(2) 对 $\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{u}_0$ 的两边取转置，得 $\boldsymbol{u}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{u}_0^{\mathrm{T}}$. 直接相乘，得

$$\boldsymbol{e}_r\Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{H}_{2k-1}\Big)=\boldsymbol{e}_r,\quad \boldsymbol{e}_r\Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{H}_{2k}\Big)=\boldsymbol{e}_r.$$

把上述两式相加，得 $\boldsymbol{e}_r\Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{H}_k\Big)=2\boldsymbol{e}_r$，即

$$\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{B}(1)=\boldsymbol{e}_r.$$

两式相减，得 $\boldsymbol{e}_r\Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}}(-1)^k\boldsymbol{H}_k\Big)=\boldsymbol{0}$，即

$$\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{B}(-1)=\boldsymbol{0}.$$

(2)⇒(3) 利用正交性条件(7.11)，取 $\omega=0$ 得 $\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{B}(1)^*=\boldsymbol{e}_r$，即 $\boldsymbol{B}(1)\boldsymbol{e}_r^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{e}_r^{\mathrm{T}}$. 根据定理7.2可知，$\hat{\boldsymbol{\varphi}}(0)=\boldsymbol{e}_r^{\mathrm{T}}$.

(3)⇒(4) 易知

$$\mu(z)=2\hat{\boldsymbol{\varphi}}(0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(z^r)(1,z^{-1},\cdots,z^{-(r-1)})^{\mathrm{T}}.$$

所以 $\mu(1)=2\hat{\boldsymbol{\varphi}}(0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(0)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(0)=2r.$

对于 $z_k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\frac{k}{r}}$，若 $k=2j-1$，其中 $j=1,2,\cdots,r$，则 $z_k^r=-1$. 因此 $\mu(z_k)=0$；若 $k=2j$，且 $j=1,2,\cdots,r-1$，则 $z_k^r=1$，从而

$$\mu(z_k)=2\sum_{\nu=0}^{r-1}z_k^{-\nu}=\frac{2(1-z_k^{-r})}{1-z_k^{-1}}=0.$$

(4)⇒(1) 留给读者作为练习. ∎

例 7.9 BAT O1 正交多小波，即 Lebrun-Vetterli 正交多小波(见文献[97]).

$$H_0=\frac{\sqrt{2}}{8}\begin{bmatrix}0 & 2+\sqrt{7}\\0 & 2-\sqrt{7}\end{bmatrix},\quad H_1=\frac{\sqrt{2}}{8}\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 3\end{bmatrix},\quad H_2=\frac{\sqrt{2}}{8}\begin{bmatrix}2-\sqrt{7} & 0\\2+\sqrt{7} & 0\end{bmatrix};$$

$$G_0=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0 & -2\\0 & 1\end{bmatrix},\quad G_1=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & 2\\-\sqrt{7} & \sqrt{7}\end{bmatrix},\quad G_2=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-2 & 0\\-1 & 0\end{bmatrix}.$$

容易验证，这是一个具有 1 阶平衡阶的多小波系统.

下面讨论如何把一个已经存在的非平衡多小波转化为平衡多小波. 我们称这种转化过程为多小波的平衡处理.

设 $\boldsymbol{\varphi}(t),\boldsymbol{\psi}(t)$ 是 r 重正交对称非平衡多小波系统，$\boldsymbol{H}(\omega),\boldsymbol{G}(\omega)$ 是相应的两尺度符号，令

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t)=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\varphi}(t),\quad \boldsymbol{\psi}_1(t)=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\psi}(t),$$

其中 $\boldsymbol{U}$ 是一个 $r\times r$ 酉阵(实数情形即正交矩阵)，满足

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(0)\boldsymbol{U}\boldsymbol{e}_r^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{e}_r^{\mathrm{T}}.$$

容易证明：$\boldsymbol{\varphi}_1(t),\boldsymbol{\psi}_1(t)$ 仍是正交对称多小波系统，且是 1 阶平衡的，即 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1(0)=\boldsymbol{e}_r^{\mathrm{T}}$；对应的两尺度符号为

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}(\omega)=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\omega)\boldsymbol{U},\quad \widetilde{\boldsymbol{G}}(\omega)=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}(\omega)\boldsymbol{U},$$

且 $\widetilde{\boldsymbol{H}}(\omega)$ 与 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 有相同的正则性和逼近阶.

由此可见，为了对非平衡多小波进行平衡化处理，矩阵$\boldsymbol{U}$起着关键作用. 我们称 $\boldsymbol{U}$ 为平衡器. 现在的问题是，如何确定这样的矩阵 $\boldsymbol{U}$ 呢?

考虑实数情形，且 $r=2$，则多尺度函数 $\boldsymbol{\varphi}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t))^{\mathrm{T}}$ 是 p 阶平衡的当且仅当 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 在点 $0,\frac{1}{2}$ 的平衡值相等，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}t^p\varphi_1(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(t-\frac{1}{2}\right)^p\varphi_2(t)\mathrm{d}t.$$

因此，正交矩阵 $\boldsymbol{U}$ 可由下面的矩阵方程确定(见文献[211])：

(1) 对于一阶平衡情形，有

$$\begin{cases}\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I},\\ \boldsymbol{U}\boldsymbol{m}_0=a\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}};\end{cases}\tag{7.47}$$

(2) 对于二阶平衡情形，有

$$\begin{cases}\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I},\\ \boldsymbol{U}(\boldsymbol{m}_0,\boldsymbol{m}_1)=\begin{bmatrix}a & b\\a & b+\frac{1}{2}a\end{bmatrix}.\end{cases}\tag{7.48}$$

这里，a,b 均为实数，且 $a\neq 0$，而向量

$$m_p=(\langle\varphi_1,t^p\rangle,\langle\varphi_2,t^p\rangle)^{\mathrm T},\quad p=0,1.$$

因为

$$\begin{aligned}m_p&=\sum_{k\in\mathbf Z}H_k\int_{-\infty}^{+\infty}t^p\boldsymbol\varphi(2t-k)\mathrm dt\\&=\frac{1}{2^{p+1}}\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\sum_{k\in\mathbf Z}k^{p-j}H_k\int_{-\infty}^{+\infty}t^j\boldsymbol\varphi(t)\mathrm dt\\&=\frac{1}{2^p}\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}M_{p-j}m_j,\end{aligned}$$

其中，$M_p=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf Z}k^pH_k$ 是 p 阶离散矩，所以

$$\begin{cases}M_0m_0=m_0,\\(2I-M_0)m_1=M_1m_0.\end{cases}\tag{7.49}$$

根据定理 7.4，矩阵 M_0 必有特征值 1，且 M_0 的其他特征值的模均小于 1，所以 $2I-M_0$ 是非奇异矩阵. 这就是说，这样的解 m_0,m_1 一定存在. 如果再约束 $\|m_0\|=1$，那么由(7.49)式即可递归地求出唯一解 m_0,m_1. 最后，求解矩阵方程(7.47)或(7.48)即可确定正交平衡器 U.

例 7.10 对于 GHM 多小波，直接计算可得

$$M_0=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&2\sqrt2\\2\sqrt2&1\end{pmatrix},\quad M_1=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}3&0\\6\sqrt2&2\end{pmatrix}.$$

根据(7.49)式，解得

$$m_0=\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^{\mathrm T},\quad m_1=\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^{\mathrm T}.$$

下面先来看看一阶平衡情形：$Um_0=ae_2^{\mathrm T}$，即

$$U\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}.$$

结合矩阵 U 的正交性，可解得 $a=\pm\frac{1}{\sqrt2}$，以及

$$U=\frac{a}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1+\sqrt2&1-\sqrt2\\-1+\sqrt2&1+\sqrt2\end{pmatrix}\quad或\quad U=\frac{a}{\sqrt3}\begin{pmatrix}-1+\sqrt2&1+\sqrt2\\1+\sqrt2&1-\sqrt2\end{pmatrix}.$$

遗憾的是，方程 $UU^{\mathrm T}=I$ 与(7.48)无解，这就是说 GHM 多小波不存在二阶正交平衡器.

顺便指出，对于一些已经构造出来的多小波，例如 CL 多小波等，不仅都是非平衡的，而且根据上面的算法往往只能求出一阶正交平衡器，至于更多

的平衡处理方法详见文献[91] 及其所引参考文献.

最后，需要特别强调的是，与单小波情形一样，在进行多小波变换之前边界处理也是不可避免的(对于下一节介绍的区间多小波例外). 对此，文献[91] 介绍了数据延拓法、矩阵计算法及边界函数法等，并给出了进一步的参考文献.

7.5 区间上的正交多小波

迄今为止，我们所讨论的尺度函数与小波函数都是定义在整个实轴上. 然而，在许多实际应用中，例如图像处理与求解带有边值条件的微分方程等，需要考虑的函数只是定义在有限区间上，如果仍用无穷区间上的小波处理这类问题，那么通常的做法是将有限区间上的数据向区间外进行延拓，其结果往往会产生“边界效应”，并且计算效率也不高，这就给小波的应用带来很大的局限性. 因此，研究有限区间上的小波具有重要意义.

在这一节，我们介绍区间$[0,1]$上的正交多小波及其构造方法. 对于一般有限区间$[a,b]$只需经过简单的变换即可化为$[0,1]$的情形. 下面先引入$L^2[0,1]$的r重多分辨率分析的概念.

定义 7.13 $L^2[0,1]$中的闭子空间列$\{V_j\}$称为$L^2[0,1]$的一个r**重正交多分辨率分析**(简记为 OMRA^r)，如果满足以下条件：

(1) 单调性：$V_j \subset V_{j+1}$，$\forall j \in \mathbf{Z}$；

(2) 逼近性：$\bigcap\limits_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\}$，$\overline{\bigcup\limits_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2[0,1]$；

(3) 伸缩性：$f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$；

(4) 存在r个函数$\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_r(t)$，使得函数族$\{\varphi_\nu(t-k),\ k\in\mathbf{Z},\ 1\leqslant \nu \leqslant r\}$构成闭子空间$V_0$的一个标准正交基.

我们称向量函数$\boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_r(t))^{\mathrm{T}}$是 OMRA^r 的多重尺度函数或向量尺度函数，简称为多尺度函数.

对于每一个$\nu = 1,2,\cdots,r$，令

$$\varphi_{jk}^{\nu}(t) = 2^{\frac{j}{2}}\varphi_\nu(2^j t - k), \quad j,k \in \mathbf{Z},$$

则$\{\varphi_{jk}^{\nu}(t),\ k\in\mathbf{Z},\ 1\leqslant \nu \leqslant r\}$构成$V_j$的标准正交基，即

$$V_j = \overline{\mathrm{span}}\{\varphi_{jk}^{\nu}(t),\ k\in\mathbf{Z},\ 1\leqslant \nu\leqslant r\}, \quad j\in\mathbf{Z}.$$

若令W_j为V_j在V_{j+1}上的正交补，即$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$且$V_j \perp W_j$，根据 OMRA^r 的单调性和逼近性可知，$W_j \perp W_k$ $(j\neq k)$，于是有

$$L^2[0,1]=\bigoplus_{j\in\mathbf{Z}}W_j. \tag{7.50}$$

相应地，存在正交多小波 $\boldsymbol{\psi}(t)=(\psi_1(t),\psi_2(t),\cdots,\psi_r(t))^{\mathrm{T}}$，其中 $\psi_\nu(t)$ 的二进伸缩与整数平移

$$\psi_{jk}^\nu(t)=2^{\frac{j}{2}}\psi_\nu(2^jt-k),\quad k\in\mathbf{Z},\ 1\leqslant\nu\leqslant r$$

构成 W_j 的标准正交基，即

$$W_j=\overline{\mathrm{span}}\{\psi_{jk}^\nu(t),\ k\in\mathbf{Z},\ 1\leqslant\nu\leqslant r\},\quad j\in\mathbf{Z}.$$

于是，$\{\psi_{jk}^\nu(t),\ j,k\in\mathbf{Z},\ 1\leqslant\nu\leqslant r\}$ 构成 $L^2[0,1]$ 的一个标准正交基.

下面介绍区间[0,1]上多项式多小波的构造方法.

设 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_r(t)$ 是区间[0,1]上的标准正交多项式，$\deg\varphi_\nu=\nu-1$，$\nu=1,2,\cdots,r$. 记 $\boldsymbol{\varphi}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_r(t))^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\varphi}_{jk}(t)=(\varphi_{jk}^1(t),\varphi_{jk}^2(t),\cdots,\varphi_{jk}^r(t))^{\mathrm{T}}$，且 $\boldsymbol{\varphi}_{00}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t)$. 再令

$$V_j=\overline{\mathrm{span}}\left\{\sum_{k=0}^{2^j-1}\boldsymbol{c}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_{jk}(t)\,\middle|\,\boldsymbol{c}_k\in\mathbf{R}^{k\times1}\right\},\quad j\in\mathbf{Z}^+. \tag{7.51}$$

可以证明下述定理：

定理7.19 设$\{V_j,\ j\geqslant0\}$的定义如(7.51)式，则

(1) $\dim V_j=2^jr$，$j\in\mathbf{Z}^+$；

(2) $\{V_j,\ j\geqslant0\}$ 构成 $L^2[0,1]$ 的一个 OMRA^r.

进一步，令 W_j 为 V_j 在 V_{j+1} 中的正交补空间，即 $V_{j+1}=V_j\bigoplus W_j$，且 $V_j\perp W_j$. 于是，有 $\dim W_j=2^jr$，$j\in\mathbf{Z}^+$，且

$$L^2[0,1]=V_0\bigoplus_{j\geqslant0}W_j. \tag{7.52}$$

下面，我们给出相应的小波函数的构造方法.

对于 $\nu=1,2,\cdots,r$，递归地定义

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_\nu(t)&=\varphi_{10}^\nu(t)-\sum_{\mu=1}^{r}\langle\varphi_{10}^\nu,\varphi_\mu\rangle\varphi_\mu(t)-\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\langle\varphi_{10}^\nu,\psi_\mu\rangle\psi_\mu(t),\\ \psi_l(t)&=\frac{\tilde{\psi}_l(t)}{\|\tilde{\psi}_l\|},\quad l=1,2,\cdots,\nu-1.\end{aligned} \tag{7.53}$$

对于 $\nu=1,2,\cdots,r$，令

$$\psi_{jk}^\nu(t)=2^{\frac{j}{2}}\psi_\nu(2^jt-k),$$

容易证明，$\{\psi_{jk}^\nu(t),\ k=0,1,\cdots,2^j-1,\ \nu=1,2,\cdots,r\}$ 构成 W_j 的标准正交基，即

$$W_j = \overline{\text{span}}\left\{ \sum_{k=0}^{2^j-1} \boldsymbol{c}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\psi}_{jk}(t) \,\middle|\, \boldsymbol{c}_k \in \mathbf{R}^{k\times 1} \right\}, \quad j \geqslant 0, \tag{7.54}$$

所以 $\boldsymbol{\psi}(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \cdots, \psi_r(t))^{\mathrm{T}}$ 就是正交多小波.

令 $\boldsymbol{\psi}_{jk}(t) = (\psi_{jk}^1(t), \psi_{jk}^2(t), \cdots, \psi_{jk}^r(t))^{\mathrm{T}}$，而 $\boldsymbol{\psi}_{00} = \boldsymbol{\psi}(t)$，则有矩阵加细方程(MRE)

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varphi}_{jk}(t) = \sum\limits_{l=2k}^{2k+1} \boldsymbol{H}_{l-2k} \boldsymbol{\varphi}_{j+1,l}(t), \\ \boldsymbol{\psi}_{jk}(t) = \sum\limits_{l=2k}^{2k+1} \boldsymbol{G}_{l-2k} \boldsymbol{\varphi}_{j+1,l}(t), \end{cases} \tag{7.55}$$

其中 $\boldsymbol{H}_k = (h_{mn}^k)_{r\times r}$，$\boldsymbol{G}_k = (g_{mn}^k)_{r\times r}$，$k = 0,1$，而

$$\begin{cases} h_{mn}^k = \langle \varphi_m, \varphi_{1k}^n \rangle, \\ g_{mn}^k = \langle \psi_m, \varphi_{1k}^n \rangle, \end{cases} \quad 1 \leqslant m,n \leqslant r, \ k = 0,1. \tag{7.56}$$

对于区间上的正交多小波，也有相应的 Mallat 分解与重构算法.

定理 7.20 对于 $f(t) \in L^2[0,1]$，定义正交投影算子 $P_j, Q_j (j \geqslant 0)$ 如下：

$$\begin{cases} P_j f = \sum\limits_{k=0}^{2^j-1} \boldsymbol{c}_{jk}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}_{jk}, \\ Q_j f = \sum\limits_{k=0}^{2^j-1} \boldsymbol{d}_{jk}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\psi}_{jk}, \end{cases} \tag{7.57}$$

则可得到如下分解公式：

$$\begin{cases} \boldsymbol{c}_{jk} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sum\limits_{n=0}^{1} \overline{\boldsymbol{H}_n} \boldsymbol{c}_{j+1,2k+n}, \\ \boldsymbol{d}_{jk} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sum\limits_{n=0}^{1} \overline{\boldsymbol{G}_n} \boldsymbol{c}_{j+1,2k+n} \end{cases} \tag{7.58}$$

和重构公式

$$\boldsymbol{c}_{j+1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n\in\mathbf{Z}} \boldsymbol{H}_{k-2n}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{c}_{jn} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n\in\mathbf{Z}} \boldsymbol{G}_{k-2n}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d}_{jn}. \tag{7.59}$$

最后，我们给出一个构造区间上的正交多小波的例子.

例 7.11 构造一个 $r = 4$ 的多小波.

利用$[-1,1]$上的 Legendre 多项式，我们可以得到$[0,1]$上的标准正交多项式：

$$\varphi_1(t) = 1,$$

$$\varphi_2(t) = \sqrt{3}(2t-1),$$

$$\varphi_3(t) = \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1),$$

$$\varphi_4(t) = \sqrt{7}(20t^3 - 30t^2 + 12t - 1),$$

其图像如图 7-1 所示.

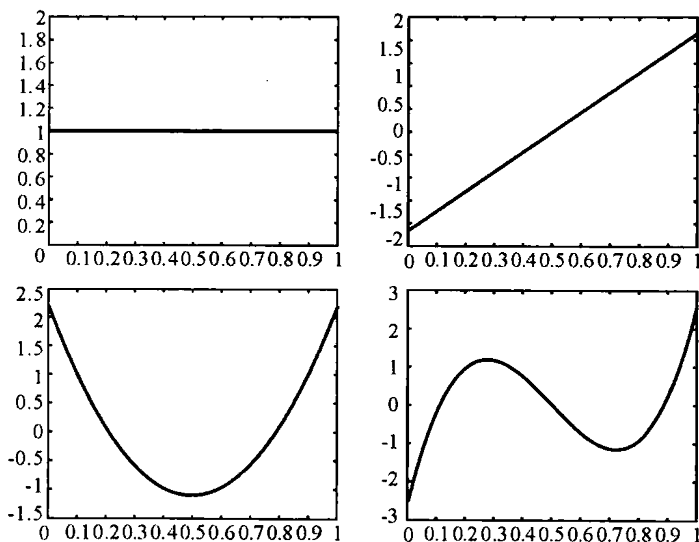


图 7-1 正交多尺度函数 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \varphi_4(t)$

利用式(7.53)中的构造方法，可得相应的小波函数如下：

$$\psi_1(t) = \begin{cases} -\dfrac{140}{3}t^3 + 70t^2 - 20t + 1, & 0 \leqslant t < \dfrac{1}{2}, \\ -\dfrac{140}{3}t^3 + 70t^2 - 20t - \dfrac{13}{3}, & \dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\psi_2(t) = \begin{cases} \sqrt{3}(30t^2 - 14t + 1), & 0 \leqslant t < \dfrac{1}{2}, \\ \sqrt{3}(30t^2 - 46t + 17), & \dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\psi_3(t) = \begin{cases} \sqrt{5}\left(\dfrac{560}{3}t^3 - 136t^2 + 26t - 1\right), & 0 \leqslant t < \dfrac{1}{2}, \\ \sqrt{5}\left(\dfrac{560}{3}t^3 - 42t^2 + 314t - \dfrac{227}{3}\right), & \dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\psi_4(t) = \begin{cases} \sqrt{7}(160t^3 - 120t^2 + 24t - 1), & 0 \leqslant t < \dfrac{1}{2}, \\ \sqrt{7}(-160t^3 + 360t^2 - 264t + 63), & \dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

其图像如图 7-2 所示.

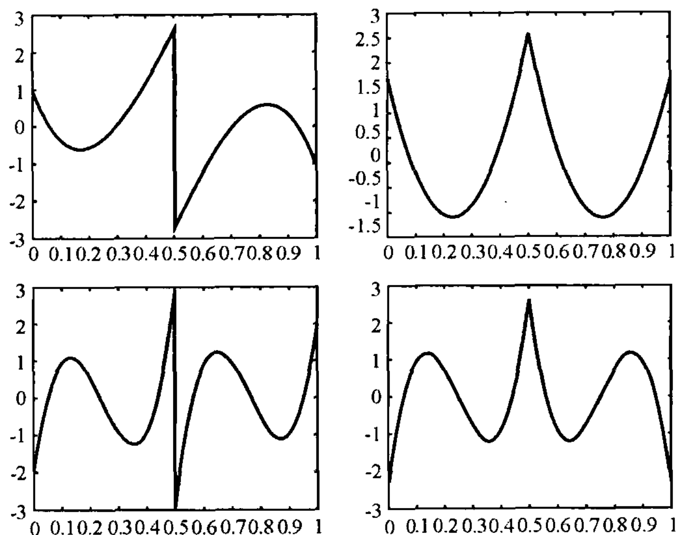


图 7-2　正交多小波 $\psi_1(t),\psi_2(t),\psi_3(t),\psi_4(t)$

容易看出，尺度函数 $\varphi_1(t),\varphi_3(t)$ 是对称的，$\varphi_2(t),\varphi_4(t)$ 是反对称的；而小波函数 $\psi_2(t),\psi_4(t)$ 是对称的，$\psi_1(t),\psi_3(t)$ 是反对称的．对应 MRE 式(7.55) 中的系数矩阵为

$$
\boldsymbol{H}_0=\begin{pmatrix}
\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0\\
-\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0\\
0 & -\frac{\sqrt{30}}{8} & \frac{\sqrt{2}}{8} & 0\\
\frac{\sqrt{14}}{16} & \frac{\sqrt{42}}{16} & -\frac{\sqrt{70}}{16} & \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{H}_1=\begin{pmatrix}
\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0\\
\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0\\
0 & \frac{\sqrt{30}}{8} & \frac{\sqrt{2}}{8} & 0\\
-\frac{\sqrt{14}}{16} & \frac{\sqrt{42}}{16} & \frac{\sqrt{70}}{16} & \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{pmatrix},
$$

$$G_0=\begin{pmatrix}\frac{3\sqrt{2}}{16} & \frac{3\sqrt{6}}{16} & \frac{7\sqrt{10}}{48} & -\frac{\sqrt{14}}{48}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{8} & \frac{\sqrt{30}}{8} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{12} & \frac{\sqrt{70}}{12}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},$$

$$G_1=\begin{pmatrix}-\frac{3\sqrt{2}}{16} & \frac{3\sqrt{6}}{16} & -\frac{7\sqrt{10}}{48} & -\frac{\sqrt{14}}{48}\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{8} & \frac{\sqrt{30}}{8} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{12} & \frac{\sqrt{70}}{12}\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

习 题 7

1. 设 $\varphi_1(t),\varphi_2(t)$ 都是 Hermite 三次样条，$\mathrm{supp}\varphi_i(t)=[0,2]$，$i=1,2$，且

$$\varphi_1(t)=\begin{cases}t^3-t^2, & 0\leqslant t<1,\\ (2-t)^2-(2-t)^3, & 1\leqslant t<2,\end{cases}$$

$$\varphi_2(t)=\begin{cases}3t^2-2t^3, & 0\leqslant t<1,\\ 3(2-t)^2-2(2-t)^3, & 1\leqslant t<2.\end{cases}$$

(1) 写出 2 尺度函数 $(\varphi_1(t),\varphi_2(t))$ 的矩阵加细方程.

(2) 求与 $(\varphi_1(t),\varphi_2(t))$ 对应的多小波 $\boldsymbol{\psi}(t)=(\psi_1(t),\psi_2(t))$.

2. 续上题. 问 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 是否为正交多小波? 若是，则阐述理由；若否，则求出 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 的正交化的多小波.

3. 设 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 与 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 分别是例 7.1 中的正交多尺度函数与正交多小波.

(1) 求 $\boldsymbol{\psi}(t)$ 的矩阵加细方程的频域表示式.

(2) 问 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是否为 MRE 式(7.6) 的唯一解? 为什么?

(3) 问 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是否为 MRE 式(7.6) 的 L^2 稳定解? 为什么?

4. 设$\{V_j\}$是$L^2(\mathbf{R})$的一个MRA，$\boldsymbol{\varphi}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_r(t))^{\mathrm{T}}\in L^2(\mathbf{R})^r$是任意向量函数，$\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)$是$\boldsymbol{\varphi}(t)$的自相关符号. 证明：$\{\varphi_\nu(t-k),k\in\mathbf{Z},1\leqslant\nu\leqslant r\}$构成子空间$V_0$的一个Riesz基当且仅当行列式

$$\det\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)\neq 0\quad(0\leqslant\omega\leqslant 2\pi).$$

5. 证明：$\boldsymbol{\varphi}(t)\in L^2(\mathbf{R})^r$是正交多尺度函数当且仅当自相关符号$\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{\varphi}}(\omega)=\boldsymbol{I}_r$（$r$阶单位矩阵）.

6. 设$\boldsymbol{\varphi}(t)\in L^2(\mathbf{R})^r$是正交多尺度函数，$\boldsymbol{L}$是$\boldsymbol{\varphi}(t)$的两尺度矩阵，证明：

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{I}.$$

7. 证明：若$\boldsymbol{\varphi}(t)\in L^2(\mathbf{R})^r$是MRE式(7.2)的紧支稳定解，$\boldsymbol{\psi}(t)$是相应的多小波，证明下列命题相互等价：

(1) $\boldsymbol{\psi}(t)$具有m阶消失矩；

(2) 任意光滑向量函数$\boldsymbol{f}(t)\in L^2(\mathbf{R})^r$都可用$\boldsymbol{\varphi}(t)$在每个尺度$2^{-j}$上作逼近，其逼近阶是$O(2^{-jm})$，且$\boldsymbol{f}(t)$的小波系数具有衰减阶$O(2^{-jm})$，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{\psi}(2^jt)\rangle\mathrm{d}t\leqslant C2^{-jm}.$$

8. 证明定理7.3的(3)⇔(4).

9. 证明定理7.3的(1)⇔(4).

10. 推导区间正交多小波变换的Mallat快速算法(7.58)与(7.59)式.

11. 设$\boldsymbol{\varphi}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t),\varphi_4(t))$是例7.11中的4尺度函数.

(1) 计算MRE式(7.55)中的所有矩阵尺度系数$\boldsymbol{H}_k,\boldsymbol{G}_k$.

(2) 求多小波$\boldsymbol{\psi}(t)$并由此验证例7.11中$\psi_1(t),\psi_2(t),\psi_3(t),\psi_4(t)$的正确性.

12. 设$(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_r(t))^{\mathrm{T}}\in L^2(\mathbf{R})^r$是紧支正交多尺度函数，令

$$g(t)=\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_{\nu k}\varphi_\nu(t-k),$$

其中$a_{\nu k}$为实常数，$1\leqslant\nu\leqslant r$，$k\in\mathbf{Z}$. 对于固定的ν，$\{a_{\nu k},k\in\mathbf{Z}\}$的序列Fourier变换为$A_\nu(\omega)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_{\nu k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}$. 证明：$\{g(t-n),n\in\mathbf{Z}\}$是$L^2(\mathbf{R})$中的标准正交系当且仅当

$$\sum_{\nu=1}^{r}|A_\nu(\omega)|^2=1.$$

13. 证明定理7.18的(4)⇒(1).

14. 证明：r重正交多小波系统(7.42)是一阶平衡的当且仅当相应的低通z变换$\boldsymbol{B}(z)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{H}_kz^k$可分解为$\boldsymbol{B}(z)=\frac{1}{2}\boldsymbol{C}(z^2)\boldsymbol{B}_0(z)\boldsymbol{C}^{-1}(z)$，其中

$$
C(z)=\begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
0 & \cdots & 0 & 1 & -1\\
-z^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix},
$$

且 $\boldsymbol{B}_0(1)\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\beta}_r$，这里 $\boldsymbol{\beta}_r=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 是分量全为 1 的 r 维列向量.

15. 设多小波系统 $\boldsymbol{H}(\omega),\boldsymbol{G}(\omega)$ 的 MCQF 如下：

$$
\boldsymbol{H}_0=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ 1 & -1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H}_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{H}_2=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ -1 & -1\end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{G}_0=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ \sqrt{3} & -\sqrt{3}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{G}_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{2} & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{G}_2=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3}\end{pmatrix}.
$$

(1) 求一阶正交平衡器 $\boldsymbol{U}$.

(2) 验证 $\widetilde{\boldsymbol{H}}(\omega)=\boldsymbol{U}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$，$\widetilde{\boldsymbol{G}}(\omega)=\boldsymbol{U}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$ 是平衡多小波系统.

16. 设信号 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 的支集 $\operatorname{supp} f(t)=[0,1]$，经过 2 尺度取样（即取样率为 4），得取样值为 $-1,4,2,-3$. 请以 GHM 小波为例，完成预处理、多小波分解与重构、后处理等计算过程.

17. 设 $\boldsymbol{\varphi}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_r(t))^{\mathrm{T}}\in L^2(\mathbf{R})^r$ 是对称的多尺度函数，T_ν 是 $\varphi_\nu(t)$ 的对称点（$1\leqslant\nu\leqslant r$），$\boldsymbol{H}(\omega)$ 是 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的矩阵两尺度符号. 证明：

$$
\boldsymbol{H}(\omega)=\boldsymbol{D}(2\omega)\boldsymbol{H}(-\omega)\boldsymbol{D}^{-1}(\omega),
$$

其中，$\boldsymbol{D}(\omega)=\operatorname{diag}(\pm\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2T_1\omega},\pm\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2T_2\omega},\cdots,\pm\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2T_r\omega})$.

第八章　小波分析的应用

小波变换具有良好的时(空)频域局部化特性，为处理非平稳信号提供了有效的数学工具，因而在图像处理、模式识别、计算机视觉、故障诊断、流体力学、地震信号分析、数据压缩等诸多领域具有广泛的应用.

本章主要论述连续小波变换的应用，信号的奇异性检测，信号的小波阈值去噪，Besov 空间小波图像去噪以及小波图像压缩等内容.

8.1　连续小波变换的应用举例

在地面上测得的重力异常值 $f(t)$ 是地下多层形状不同的界面包围的不同密度的物质所造成的，设第 n 层物质所造成的重力异常值为 $f_n(t)$ $(n=1, 2,\cdots,N)$，则

$$f(t)=\sum_{n=1}^{N} f_n(t).$$

现希望从地面获取的信号 $f(t)$ 来提取出 $f_n(t)$. 当然，对于这样的问题，如果没有其他的条件，那么数学上是无法解决的.

根据地质学的一般情况，在浅层界面的 $f_n(t)$，其频谱在高频区域，而深层界面的 $f_n(t)$ 的频谱则在低频区域. 我们现在作一假定，各界面的频率区间不重叠，且有一定“间隙”，即假定

$$\begin{cases}\operatorname{supp}\hat{f}_1(\omega)=(\alpha_1,\beta_1),\\ \operatorname{supp}\hat{f}_2(\omega)=(\alpha_2,\beta_2),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \operatorname{supp}\hat{f}_N(\omega)=(\alpha_N,\beta_N),\end{cases}\tag{8.1}$$

且

$$0<\alpha_1<\beta_1<\alpha_2<\beta_2<\cdots<\alpha_N<\beta_N.\tag{8.2}$$

由于小波变换在时频域的局部性，可以用来进行分频处理. 现在仅需考

虑正频(即 $a>0$) 的情况，这时小波变换的反演公式为

$$f(t)=\frac{2}{C_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}W_f(a,b)\,\overline{\psi_{a,b}(t)}\,\frac{1}{a^2}\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b, \tag{8.3}$$

其中

$$C_\psi=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega<+\infty.$$

为说明简单起见，不妨假定 $N=2$，即 $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$. 两边作连续小波变换，得

$$W_f(a,b)=W_{f_1}(a,b)+W_{f_2}(a,b).$$

由假设，有

$$\operatorname{supp}\hat{f}_1(\omega)=(\alpha_1,\beta_1),$$

$$\operatorname{supp}\hat{f}_2(\omega)=(\alpha_2,\beta_2),$$

且

$$\operatorname{supp}\hat{f}_1\cap\operatorname{supp}\hat{f}_2=\varnothing.$$

如果存在常数 A_1,B_1，$A_1<B_1$，使得当 $a\in[A_1,B_1]$ 时，$W_{f_2}(a,b)=0$；当 $a\notin[A_1,B_1]$ 时，$W_{f_1}(a,b)=0$，那么由反演公式(8.3) 即得到

$$\begin{aligned}f_1(t)&=\frac{2}{C_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}W_{f_1}(a,b)\,\overline{\psi_{a,b}(t)}\,\frac{1}{a^2}\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b\\&=\frac{2}{C_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{A_1}^{B_1}W_{f_1}(a,b)\,\overline{\psi_{a,b}(t)}\,\frac{1}{a^2}\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b\\&=\frac{2}{C_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{A_1}^{B_1}(W_{f_1}(a,b)+W_{f_2}(a,b))\,\overline{\psi_{a,b}(t)}\,\frac{1}{a^2}\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b\\&=\frac{2}{C_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{A_1}^{B_1}W_f(a,b)\,\overline{\psi_{a,b}(t)}\,\frac{1}{a^2}\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b,\end{aligned}$$

即只要已知 $W_f(a,b)$，就可以反演出 $f_1(t)$.

现在的问题是，这样的常数 A_1,B_1 是否存在？如何确定？

首先，选取小波函数 $\psi(t)$，使其 Fourier 变换有紧支集. 例如取

$$\hat{\psi}(\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mathrm{e}^{(\omega-1)^2-\frac{1}{p^2}}}, & |\omega-1|<\dfrac{1}{p},\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{8.4}$$

其中 $p>0$ 是待定参数，则

$$\operatorname{supp}\hat{\psi}(\omega)=\left[1-\frac{1}{p},1+\frac{1}{p}\right], \tag{8.5}$$

且

$$\operatorname{supp}\hat{\psi}_{a,b}(\omega)=\left[\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{p}\right),\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{p}\right)\right]. \tag{8.6}$$

其次，由于要求当 $a \in [A_1, B_1]$ 时，

$$W_{f_1}(a,b) = \langle f_1, \psi_{a,b} \rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f}_1, \hat{\psi}_{a,b} \rangle \neq 0,$$

所以 $\hat{f}_1(\omega)$ 的支集与 $\hat{\psi}_{a,b}(\omega)$ 的支集必有非空的交集，即

$$(\alpha_1, \beta_1) \cap \left[\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{p}\right), \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{p}\right)\right] \neq \varnothing.$$

因此，应有

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a}\left(1-\dfrac{1}{p}\right) < \beta_1, \\ \dfrac{1}{a}\left(1+\dfrac{1}{p}\right) > \alpha_1. \end{cases}$$

由此得

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{\beta_1} < a < \left(1+\frac{1}{p}\right)\frac{1}{\alpha_1}. \tag{8.7}$$

于是，只需取 $A_1 = \left(1-\dfrac{1}{p}\right)\dfrac{1}{\beta_1}$，$B_1 = \left(1+\dfrac{1}{p}\right)\dfrac{1}{\alpha_1}$，则

$$W_{f_1}(a,b) = \begin{cases} \langle f_1, \psi_{a,b} \rangle \neq 0, & \text{当 } a \in [A_1, B_1] \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } a \notin [A_1, B_1] \text{ 时}. \end{cases}$$

最后，考虑如何选择参数 p，使 $a \in [A_1, B_1]$ 时，$W_{f_2}(a,b) = 0$?

由于 $W_{f_2}(a,b) = \langle f_2, \psi_{a,b} \rangle = \dfrac{1}{2\pi}\langle \hat{f}_2, \hat{\psi}_{a,b} \rangle$，所以应有

$$\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{p}\right) > \beta_2 \quad \text{或} \quad \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{p}\right) < \alpha_2.$$

因此，当 $a \in [A_1, B_1] = \left[\left(1-\dfrac{1}{p}\right)\dfrac{1}{\beta_1}, \left(1+\dfrac{1}{p}\right)\dfrac{1}{\alpha_1}\right]$时，若再附加条件$\dfrac{2}{ap} < \alpha_2 - \beta_1$，就能使 $W_{f_2}(a,b) = 0$，即需同时满足

$$a > \left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{\beta_1} \quad \text{和} \quad \frac{1}{p} < \frac{a}{2}(\alpha_2 - \beta_1),$$

这只要$\dfrac{1}{p} < \dfrac{1}{2\beta_1}\left(1-\dfrac{1}{p}\right)(\alpha_2 - \beta_1)$ 即可. 解此不等式，得 $p > \dfrac{(\alpha_2 + \beta_1)}{(\alpha_2 - \beta_1)}$.

这样，在已知 $\operatorname{supp} \hat{f}_1 = (\alpha_1, \beta_1)$，$\operatorname{supp} \hat{f}_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ 且 $\beta_1 < \alpha_2$ 的假定下，就可以由 $f(t)$ 反演出 $f_1(t)$.

一般地，对于 $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_N(t)$，同理可知，只要取

$$A_n = \left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{\beta_n}, \quad B_n = \left(1+\frac{1}{p}\right)\frac{1}{\alpha_n}, \quad n = 1, 2, \cdots, N,$$

以及

$$p > p_0 = \max_{1\leqslant n\leqslant N}\left\{\frac{\alpha_n + \beta_{n-1}}{\alpha_n - \beta_{n-1}}\right\},$$

就可由 $f(t)$ 逐层地分离出 $f_1(t), f_2(t), \cdots, f_N(t)$.

8.2 信号的奇异性检测

信号的奇异性或非正则结构通常包含有十分重要的信息，是信号的重要特征之一. 例如，机械故障、电力系统故障、脑电图心电图中的异常、地下目标的位置及形状等，都对应于信号的突变点(信号变化急剧之处). 虽然它们发生的物理背景不同，但作为信号来看，都属于同一个问题：即如何提取信号中的突变点以及判定奇异性.

8.2.1 多尺度微分算子

为了能够利用小波变换准确检测信号奇异点的位置，我们自然希望小波函数具有较小支集或快速衰减. 根据第 4 章定理 4.8 可知，这样的小波变换可以表示成一个**多尺度微分算子**，即

$$W_f(a,b) = a^m\left(f * \frac{\mathrm{d}^m\overline{\theta_a}}{\mathrm{d}t^m}\right)(b) = a^m\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}b^m}(f * \overline{\theta_a})(b),$$

其中$\overline{\theta_a}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\overline{\theta\left(-\frac{t}{a}\right)}$，而 $\theta(t)$ 是一个快速衰减函数. 下面我们讨论这种多尺度微分算子.

为确定起见，不妨取 $\theta(t)$ 是 **Gauss 函数**，即

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}},$$

则 $\theta(t)$ 满足以下两个条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(t)\mathrm{d}t = 1, \qquad \lim_{|t|\to+\infty}\theta(t) = 0. \tag{8.8}$$

可见，$\theta(t)$ 是一个低通光滑偶对称函数. 令

$$\psi^{(1)}(t) = \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{8.9}$$

$$\psi^{(2)}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1-t^2)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{8.10}$$

则 $\psi^{(1)}(t)$ 是一个局部奇对称带通函数，$\psi^{(2)}(t)$ 是一个局部偶对称带通函数. 容易证明：$\psi^{(1)}(t)$ 和 $\psi^{(2)}(t)$ 均满足基本小波的可允许条件，所以 $\psi^{(1)}(t)$ 和

$\psi^{(2)}(t)$ 均可用作小波母函数. $\psi^{(2)}(t)$ 就是 Marr 小波.

我们知道，卷积是一个磨光子，可以使信号变得更光滑，因而使信号的奇异性更突出. 现将信号 $f(t)$ 分别与 $\psi^{(1)}(t),\psi^{(2)}(t)$ 作卷积，并注意到 $f(t)$ 与 $\theta(t)$ 的卷积表示式，可得

$$
\begin{aligned}
f*\psi^{(1)}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\theta(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\theta(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f*\theta(t)), \\
f*\psi^{(2)}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\theta(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\theta(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(f*\theta(t)).
\end{aligned}
$$

对于任意函数 $g(t)$，引入尺度因子 a，并记

$$
g_a(t) = \frac{1}{a}g\left(\frac{t}{a}\right), \quad a > 0. \tag{8.11}
$$

若取 $\psi^{(1)}(t)$ 或 $\psi^{(2)}(t)$ 为基本小波，则信号 $f(t)$ 在尺度为 a，位移为 t 处的卷积型小波变换为

$$
W_f^{(1)}(a,t) = f*\psi_a^{(1)}(t) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\psi^{(1)}\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\mathrm{d}\tau, \tag{8.12}
$$

$$
W_f^{(2)}(a,t) = f*\psi_a^{(2)}(t) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\psi^{(2)}\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\mathrm{d}\tau. \tag{8.13}
$$

根据 $\psi^{(1)}(t),\psi^{(2)}(t)$ 的定义，(8.12) 与(8.13) 式也可分别表示为

$$
W_f^{(1)}(a,t) = f*\left(a\,\frac{\mathrm{d}\theta_a}{\mathrm{d}t}\right)(t) = a\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f*\theta_a(t)), \tag{8.14}
$$

$$
W_f^{(2)}(a,t) = f*\left(a^2\,\frac{\mathrm{d}^2\theta_a}{\mathrm{d}t^2}\right)(t) = a^2\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(f*\theta_a(t)). \tag{8.15}
$$

这就是说，对信号 $f(t)$ 用 $\psi^{(1)}(t)$ 和 $\psi^{(2)}(t)$ 作小波变换，可以分别看做 $f(t)$ 在尺度 a 下经光滑函数 $\theta(t)$ 作磨光处理后的一阶导数与二阶导数.

作为例子，考虑具有阶跃式边缘和脉冲式尖峰的信号 $f(t)$，用 $\psi^{(1)}(t)$ 和 $\psi^{(2)}(t)$ 分别与 $f(t)$ 作小波变换，如图 8-1 所示. 可以看出，小波变换的奇偶性与 $\psi^{(1)}(t),\psi^{(2)}(t)$ 的局部奇偶性恰好相反或相同，并且信号的局部突变也对应着小波变换的极值点或零点.

因此，多尺度微分算子可用于检测信号的奇异性，这只需先将信号 $f(t)$ 在不同尺度上用一个光滑函数 $\theta(t)$ 进行磨光处理，即作卷积 $f*\theta(t)$，然后再对 $f*\theta(t)$ 的一阶导数或二阶导数(相当于 $f(t)$ 的小波变换)进行分析以检测出信号 $f(t)$ 的突变位置.

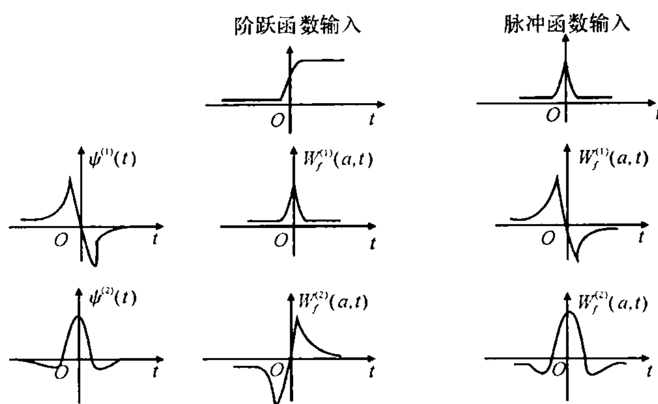


图 8-1 $\psi^{(1)}(t),\psi^{(2)}(t)$ 对局部奇、偶函数卷积的影响

8.2.2 小波变换的模极大值

信号经过小波变换后，对应于突变点处的小波系数的绝对值往往都是比较大的，所以信号的局部奇异性与小波变换的模极大值具有十分密切的联系，根据小波变换的模极大值在不同尺度上的衰减速度可以检测信号的局部奇异性. 下面，我们用一个典型例子来说明这一方法.

设信号 $f(t)$ 在时刻 $t = t_0, t_2$ 具有阶跃奇异性，将 $f(t)$ 分别与 $\theta(t)$，$\frac{d\theta}{dt}, \frac{d^2\theta}{dt^2}$ 作卷积，如图 8-2 所示. 可以看出，信号的突变点与小波变换模

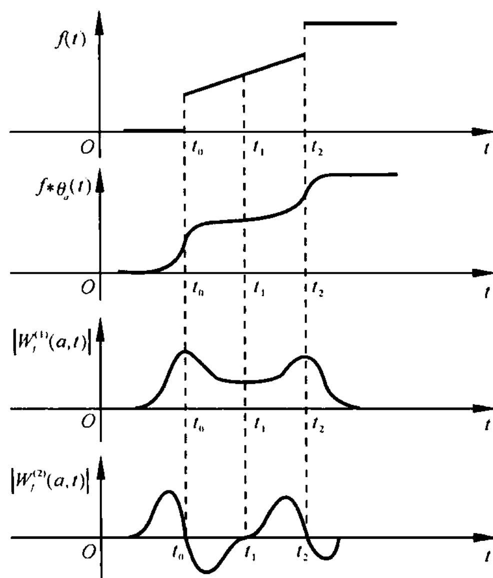


图 8-2 信号突变点与小波变换模极值的关系

$|W_f^{(i)}(a,t)|(i=1,2)$ 的极大值点以及零点之间具有如下关系：

(1) 由于$\theta(t)$是低通光滑函数，所以$f*\theta_a(t)$将信号在突变点处部分高频量滤去，因此$f*\theta_a(t)$在信号的突变点处比较光滑.

(2) 由于$\psi^{(1)}(t)$和$\psi^{(2)}(t)$的局部奇偶性，将它们与信号$f(t)$作卷积之后，使得$f(t)$的突变点对应于$W_f^{(1)}(a,t)$的模极大值点，而对应于$W_f^{(2)}(a,t)$的零点.

(3) 曲线$f*\theta_a(t)$的三个拐点分别对应于信号$f(t)$的两个突变点$t=t_0,t_2$与一个变化平缓的点$t=t_1$，而对应于$f*\theta_a(t)$的二阶导数的全部零点. 但应注意到这三个拐点与$f*\theta_a(t)$的一阶导数模极值点的对应关系，既有极大值点又有极小值点，所以仅由$f*\theta_a(t)$的二阶导数的零点并不能准确检测出信号的突变点.

综上所述，若取光滑函数的一阶导数作为小波母函数将信号作小波变换，则小波变换的模极大值点对应于信号突变点的位置.

需要指出的是，若光滑函数$\theta_a(t)$的尺度a越小，它对信号的光滑化区间越小，则$f*\theta_a(t)$的一阶导数即小波变换$W_f^{(1)}(a,t)$的模极大值点与信号突变点的位置对应关系越准确. 但由于小尺度下的小波变换系数易受噪声影响，可能会产生伪极值点，而在大尺度下，由于在对信号进行磨光处理的同时，噪声也得到了磨光处理，故极值相对稳定，但磨光处理也导致极值点定位相对较差. 因此在利用小波变换模极大值检测突变点时，需要多尺度综合分析才能获得最佳效果. 关于这方面的进一步论述可参见文献[103].

8.2.3 Lipschits 指数

为了进一步刻画小波变换模极大值与信号突变点的关系，我们必须对信号局部变化的程度给予精确的量化描述. 正如我们在第二章已经看到的，Lipschits 指数既可以度量信号在区间上的一致正则性，也可以度量信号在某一时刻的点态正则性. 如果信号$f(t)$在时刻t_0具有奇异性，那么$f(t)$在点t_0是不可微的，因此$f(t)$在点t_0处的 Lipschits 指数可以刻画这种奇异性.

设$f(t)$在点t_0的某个邻域内具有直到$n+1$阶的导数，则$f(t)$在t_0处的n阶 Taylor 公式为

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^n+\varepsilon(t,t_0) \\ &= p_n(t,t_0)+\varepsilon(t,t_0), \end{aligned}$$

其中多项式

$$p_n(t,t_0)=f(t_0)+f'(t_0)(t-t_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n$$

称为 $f(t)$ 在 t_0 处的 **Taylor 多项式**. 当 $|t-t_0|\leqslant h$ 时，逼近误差

$$\varepsilon(t,t_0)=|f(t)-p_n(t,t_0)|\leqslant\frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{|u-t_0|\leqslant h}|f^{(n+1)}(u)|.$$

由此可见，用 $p_n(t,t_0)$ 逼近 $f(t)$ 时的误差 $\varepsilon(t,t_0)$ 具有一个由 $|h|$ 的整数次幂表示的上界. Lipschits 指数则是把这个上界推广到 $|h|$ 的非整数次幂的情形. 有些文献也称 Lipschits 指数为 Hölder 指数.

定义 8.1 函数 $f(t)$ 称为在点 t_0 处**具有点态 Lipschits 指数** $\alpha\geqslant 0$，如果存在 $M>0$ 及 $n=\lfloor\alpha\rfloor$ 次多项式 $p_n(t,t_0)$，使得

$$|f(t)-p_n(t,t_0)|\leqslant M|t-t_0|^{\alpha},\quad \forall t\in\mathbf{R}. \tag{8.16}$$

函数 $f(t)$ 称为在区间 $[a,b]$ 上**具有一致 Lipschits 指数** α，如果存在 $M>0$ 使得(8.16) 式对所有 $t_0\in[a,b]$ 成立，其中 M 与 t_0 无关.

对于任意 t_0，多项式 $p_n(t,t_0)$ 是唯一确定的. 如果 $f(t)$ 在点 t_0 及其某个邻域是 $n=\lfloor\alpha\rfloor$ 阶连续可微的，那么 $p_n(t,t_0)$ 就是 $f(t)$ 在点 t_0 处的 Taylor 多项式.

可以证明，如果 $f(t)$ 在点 t_0 的某邻域内具有一致 Lipschits 指数 $\alpha>n$，那么 $f(t)$ 在该邻域内是 n 阶连续可微的. 因此，$f(t)$ 的 Lipschits 指数 α 越大，其光滑性越好；α 越小其奇异性越大.

如果 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$，那么 $p_n(t,t_0)=f(t_0)$. 此时，定义 8.1 与第 2 章的定义 2.8 和定义 2.9 一致.

例 8.1 设 $f(t)$ 是如图 8-3 (a) 所示的斜坡函数，显然有

$$|f(t)-f(t_0)|=O(|t-t_0|),$$

所以 $f(t)$ 在点 t_0 处的 Lipschits 指数 $\alpha=1$.

例 8.2 设 $f(t)$ 是如图 8-3 (b) 所示的阶跃函数，因为

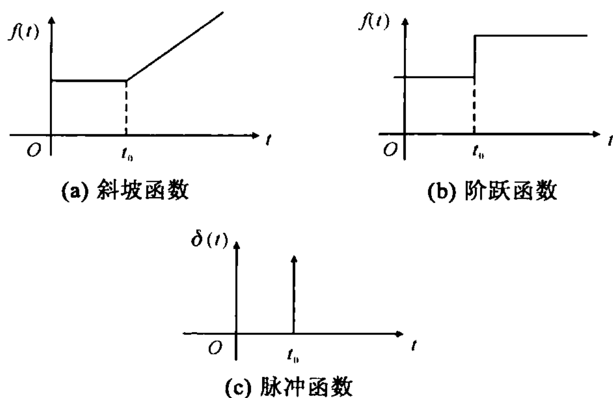
$$|f(t)-f(t_0)|=\text{常数}=O(|t-t_0|^0),$$

所以 $f(t)$ 在 t_0 的 Lipschits 指数为 $\alpha=0$.

需要指出的是，Lipschits 指数还可推广到负数情形.

例 8.3 设 $f(t)$ 是脉冲函数 $\delta(t-t_0)$，如图 8-3 (c) 所示. 因为 δ 的原函数 $F(t)=\int\delta(t-t_0)\mathrm{d}t$ 为一单位阶跃，根据例 8.2，$F(t)$ 在 t_0 处的 Lipschits 指数 $\alpha=0$，所以 δ 函数在 t_0 处的 Lipschits 指数为 $\alpha-1=-1$.

从几何上看，上述 3 个函数在突变点 t_0 处的 Lipschits 指数的关系也比较



(a) 斜坡函数 (b) 阶跃函数

(c) 脉冲函数

图 8-3 几个特殊的函数

直观. 阶跃函数在点 t_0 处的光滑性不如斜坡函数好，且斜坡函数在点 t_0 处的导数为阶跃函数，而斜坡函数在 t_0 处的 Lipschits 指数为 $\alpha=1$，所以阶跃函数在 t_0 的 Lipschits 指数为 $\alpha=0$.

脉冲 δ 函数在 t_0 处的光滑性不如阶跃函数，阶跃函数在 t_0 处的导数为 δ 函数，而阶跃函数在 t_0 处的 Lipschits 指数为 $\alpha=0$，所以 δ 函数在 t_0 处的 Lipschits 指数为 $\alpha=-1$.

为了用小波变换刻画局部突变信号的特征，小波函数 $\psi(t)$ 应具有较好的局部性或快速衰减性. 如果 $\psi(t)$ 在区间$(-\infty,+\infty)$ 上是连续可微的，那么 $\psi(t)$ 的局部增长或 $t\to\pm\infty$ 时的衰减性可表示为

$$\psi(t)=O\left(\frac{1}{1+t^2}\right).$$

对于任一 $f(t)\in\mathbf{C}^\alpha$，相应小波变换系数的局部增长与衰减性表现为

$$|W_f(j,k)|=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\psi_{jk}(t)\mathrm{d}t=O(2^{-j\alpha}),\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1.$$

这就表明了小波变换系数模极值的一个重要性质：对不同局部突变的信号 $f(t)\in\mathbf{C}^\alpha$，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$，小波变换模极大值随尺度的变化而变化.

可以证明：如果小波变换系数在区间$[t_1,t_2]$上满足

$$|W_f(a,t)|\leqslant Ka^\alpha, \tag{8.17}$$

也就是

$$\ln|W_f(a,t)|\leqslant \ln K+\alpha\ln a,$$

其中，$K>0$ 为常数，那么 $f(t)$ 在区间$[t_1,t_2]$上具有一致 Lipschits α.

对于二进小波变换，$a=2^j$，则有

$$\log_2 |W_f(2^j, t)| \leqslant \log_2 K + j\alpha. \tag{8.18}$$

于是，式(8.18)揭示了Lipschits指数α与小波变换的尺度j以及模极大值之间的变化规律. 当$\alpha > 0$时，小波变换模极大值随尺度j的增大而增大；当$\alpha < 0$时，小波变换模极大值随尺度j的增大而减小；当$\alpha = 0$时，小波变换模极大值不随尺度j的变化而变化. 图8-4清楚地呈现出上述特性. 信号在$t = 2$处有一个阶跃突变($\alpha = 0$)，在$t = 3$处有一个脉冲尖峰($\alpha < 0$)，而在$t = 1,4$处则有$\alpha > 0$的正则性.

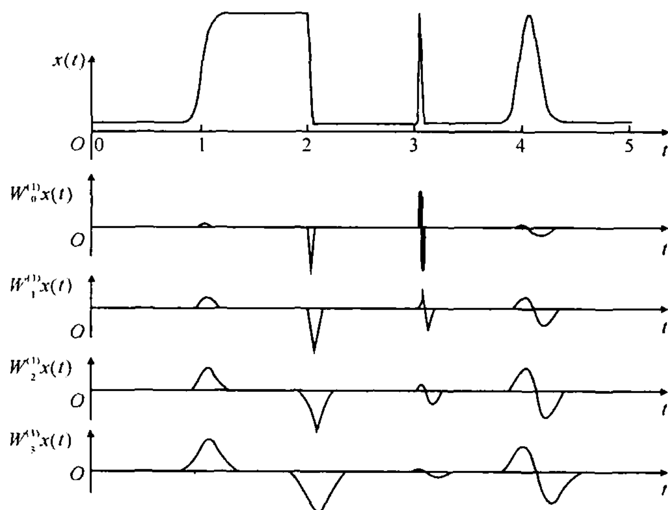


图8-4 几种突变信号的小波变换模极值随尺度的变化

8.2.4 平滑因子

平滑因子是反映信号边缘特征的另一个重要参数.

在各种工程应用中往往会遇到这样一种情形，虽然信号在某处变化剧烈，但不一定是奇异的. 如图8-4所示，信号$f(t)$在点$t = 1,4$的一个邻域内变化比较平缓，其实这种边缘特征可以被看做一个典型的Lipschits指数为α的奇异函数$h(t)$与一个方差为σ^2的光滑函数$g_\sigma(t)$进行平滑处理(即作卷积)的结果，其中σ的大小反映了边缘过渡的快慢. 因此该光滑函数的方差σ^2就成了另一个表征函数边缘特性的参数. 我们将参数σ^2或者σ称为**平滑因子**. 下面将讨论如何度量这种边缘的平滑因子以及相应的Lipschits指数α.

为确定起见，取Gauss函数作为这种光滑函数$g(t)$，则

$$g_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}.$$

信号 $f(t)$ 是将 $h(t)$ 在 t_0 处用 $g_\sigma(t)$ 进行平滑处理后的函数，即

$$f(t)=h*g_\sigma(t), \tag{8.19}$$

其中，$h(t)$ 在 t_0 处具有 Lipschits 指数 α.

若取小波函数为另一个光滑函数 $\theta(t)$ 的导数，则由(8.14)式知信号 $f(t)$ 的小波变换可表示为

$$W_f(a,t)=a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f*\theta_a)(t)=a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((h*g_\sigma)*\theta_a)(t). \tag{8.20}$$

为便于讨论，假定 $\theta(t)$ 也是 Gauss 函数或者在某种意义下接近 Gauss 函数，记 $\theta_a(t)$ 与 $g_\sigma(t)$ 的卷积为 $g_{s_0}(t)$，即

$$g_{s_0}(t)=\theta_a*g_\sigma(t), \tag{8.21}$$

可以证明，$g_{s_0}(t)$ 仍是一个方差为 s_0^2 的 Gauss 函数，且

$$s_0=\sqrt{a^2+\sigma^2}. \tag{8.22}$$

若令 $a=2^j$，则式(8.20)可表示为

$$W_f(2^j,t)=2^j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h*g_{s_0})(t)=\frac{2^j}{s_0}W_h(s_0,t). \tag{8.23}$$

根据式(8.20)和(8.23)可得如下结论：一个在 t_0 处具有奇异特性的信号 $h(t)$ 在尺度 s_0 下的小波变换，等于将 $h(t)$ 用方差为 σ^2 的 Gauss 函数进行平滑后的信号 $f(t)=h*g_\sigma(t)$ 在尺度 2^j 下的小波变换.

定理8.1 对于任意尺度 $s>0$，如果存在常数 $K>0$ 使得 $h(t)$ 的小波变换在 t_0 的某个邻域 $U(t_0,\delta)$ 满足

$$|W_h(s,t)|\leqslant Ks^\alpha,$$

那么当 $t\in U(t_0,\delta)$ 时 $f(t)$ 的小波变换满足

$$|W_f(a,t)|\leqslant Kas_0^{\alpha-1}, \tag{8.24}$$

其中，s_0 如式(8.22)所示.

证 因为 $f(t)=(h*g_\sigma)(t)$，所以由(8.14)式有

$$\begin{aligned}W_f(a,t)&=a\left[\left(f*\frac{\mathrm{d}\theta_a}{\mathrm{d}t}\right)(t)\right]=a\left[\left((h*g_\sigma)*\frac{\mathrm{d}\theta_a}{\mathrm{d}t}\right)(t)\right]\\&=a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[((h*g_\sigma)*\theta_a)(t)]=a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(h*g_{s_0})(t)]\\&=a\left[\left(h*\frac{\mathrm{d}g_{s_0}}{\mathrm{d}t}\right)(t)\right].\end{aligned}$$

另一方面，有

$$W_h(s_0,t) = h * \psi_{s_0}(t) = s_0\left[\left(h * \frac{\mathrm{d}\theta_{s_0}}{\mathrm{d}t}\right)(t)\right] = s_0\left[\left(h * \frac{\mathrm{d}g_{s_0}}{\mathrm{d}t}\right)(t)\right].$$

所以 $W_f(a,t) = \frac{a}{s_0}W_h(s_0,t)$. 故

$$|W_f(a,t)| = \frac{a}{s_0}|W_h(s_0,t)| \leqslant \frac{a}{s_0}Ks_0^{\alpha} = Kas_0^{\alpha-1}. \qquad \blacksquare$$

因此，我们可以利用式(8.24)中的三个参数 K,σ,α 来描述小波变换模极大值随尺度变化的定量特征，并根据它们的变化对信号的边缘进行分类. 如果将信号放大 λ 倍，则式中的 K 变为 λK，而 σ,α 不发生变化. 如果将信号进一步用另一个方差为 σ_0^2 的高斯函数进行平滑处理，则 σ^2 变为 $\sigma^2+\sigma_0^2$，而 K，σ 不发生变化. 可见，这三个参数能够刻画信号在 t_0 处的不同特征.

下面我们讨论如何由小波变换的模极大值来计算 Lipschits 指数 α 和平滑因子 σ.

当尺度 s 和时间 t 连续变化时，如果能够检测出所有尺度、时间上的模极大值 $|W_f(s,t)|$，那么可以得到在模极大值 - 尺度 - 时间(w-s-t)空间中的一张曲面，如图 8-5 所示.

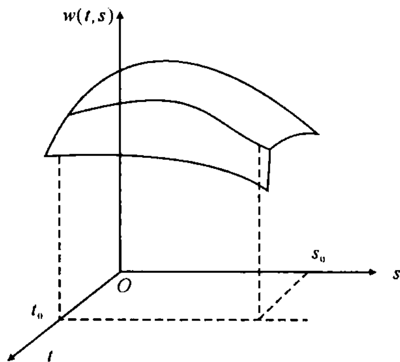


图 8-5　小波变换曲面

一般情况下，根据尺度 s_0 下极值点的位置与大小，可以估计这些极值点在下一尺度 s_0+1 下的极值. 具体描述如下：

如果信号在(t_0,s_0)处有一个较大的模极大值，而信号在(t_0,s_0+1)处也有一个模极大值，则可以判定这两个极值点是对应于同一突变点的. 这种方法虽然不够精确，但只需通过二进尺度上的小波变换模极大值就可以求得 Lipschits 指数 α 和平滑因子 σ，因而大大减少了计算量. 其具体计算方法如下所述：

将式(8.24)两边同时平方，令 $a=2^j$，并取等号，得

$$|W_f(2^j,t)|^2 = K^2 4^j s_0^{2(\alpha-1)}. \tag{8.25}$$

对于尺度 $j=1,2,3$，设相应的小波变换模极大值分别为 w_1,w_2,w_3，则由(8.22)与(8.25)式可得如下三个方程：

$$\begin{cases} w_1^2 = K^2 4(4+\sigma^2)^{\alpha-1}, \\ w_2^2 = K^2 4^2(4^2+\sigma^2)^{\alpha-1}, \\ w_3^2 = K^2 4^3(4^3+\sigma^2)^{\alpha-1}. \end{cases} \tag{8.26}$$

联立上述三式，即可解得参数 K,σ,α.

如果计算结果不够稳健，那么可取更多尺度 $j=1,2,\cdots,n$ ($n>3$)，并计算相应的小波变换模极大值 $w_1,w_2,\cdots,w_n$，代入(8.25)式，再用非线性最小二乘法求解参数 K,σ,α.

需要指出的是，这种方法对于具有分形结构的信号是无效的，关于具有分形结构信号的奇异性问题的讨论可参阅文献[103].

8.3 信号的小波阈值去噪

信号的去噪又称信号滤波. 小波域上的信号去噪主要可分为 Bayes 方法与非 Bayes 方法，其中非 Bayes 方法主要有 3 种：即 Mallat 的模极大值法、Xu 的空域相关法、Donoho 的小波阈值法(见文献[204],[220]). 近年来，建立在一些光滑函数空间上的变分去噪方法也受到普遍关注(见文献[64],[100]).

本节主要阐述小波阈值去噪中估计小波系数的硬阈值和软阈值方法，并针对硬阈值法不连续和软阈值法有偏差的缺点，介绍三种改进方案以及相应的估计模型，它们都能够在不同程度上克服软阈值和硬阈值法所固有的局限性.

8.3.1 估计小波系数的软、硬阈值方法

设有如下观测信号：

$$f(t) = s(t) + n(t), \tag{8.27}$$

其中，$s(t)$ 为原始信号，$n(t)$ 是方差为 σ^2 的高斯白噪声，服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$. 直接从观测信号 $f(t)$ 中把有用信号 $s(t)$ 提取出来是十分困难的，必须借助于其他变换方法. 小波变换理论为信号的去噪提供了强有力的工具，克服了传统方法处理非平稳信号时存在的局限性.

小波变换具有能量集中特性. 观测信号 $f(t)$ 经小波变换后，噪声成分

$n(t)$ 的能量主要集中在高频部分且比较均匀地分布在个数较多但幅值较小的小波系数上，而原始信号 $s(t)$ 的能量则集中分布在少数几个幅值较大的小波系数上. 这就是说，信号的小波系数值必然大于噪声的小波系数值. 因此在小波变换域能够实现信号与噪声的有效分离.

对于一维信号 $f(t)$ 来说，我们首先对其进行离散采样，得到 N 点离散信号 $f(n)$，$n=0,1,\cdots,N-1$，其小波变换系数为

$$W_f(j,k)=2^{\frac{j}{2}}\sum_{n=0}^{N-1}f(n)\psi(2^j n-k). \tag{8.28}$$

在实际应用中，直接利用式(8.28)计算是比较繁琐的，况且 $\psi(t)$ 一般都没有解析表达式，因此要借助于双尺度方程，从而得到小波变换的递归实现方法：

$$S_f(j+1,k)=S_f(j,k)*h(j,k), \tag{8.29}$$

$$W_f(j+1,k)=S_f(j,k)*g(j,k), \tag{8.30}$$

其中，h 和 g 分别是对应于尺度函数 $\varphi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 的低通和高通滤波器，$S_f(0,k)$ 为原始信号 $f(k)$，$S_f(j,k)$ 为 j 尺度上的逼近系数，$W_f(j,k)$ 为小波系数. 相应地，小波变换重构公式为

$$S_f(j-1,k)=S_f(j,k)*\widetilde{h}(j,k)+W_f(j,k)*\widetilde{g}(j,k). \tag{8.31}$$

为了方便起见，小波系数 $W_f(j,k)$ 简记为 $w_{j,k}$. 对观测信号 $f(k)=s(k)+n(k)$ 作离散小波变换之后，由小波变换的线性性质可知，分解得到的小波系数 $w_{j,k}$ 仍然由两部分组成：一部分是 $s(k)$ 对应的小波系数 $W_s(j,k)$，记为 $u_{j,k}$，另一部分是 $n(k)$ 对应的小波系数 $W_n(j,k)$，简记为 $v_{j,k}$，则

$$w_{j,k}=u_{j,k}+v_{j,k}.$$

小波阈值去噪的基本步骤是：

(1) 先对含噪信号 $f(k)$ 作离散小波变换，得到一组小波系数 $w_{j,k}$；

(2) 再对 $w_{j,k}$ 进行阈值处理，确定小波系数的估计值 $\hat{w}_{j,k}$，使得 $\|\hat{w}_{j,k}-u_{j,k}\|$ 达到最小；

(3) 利用 $\hat{w}_{j,k}$ 进行小波重构，得到估计信号 $\hat{f}(k)$，即为去噪之后的信号.

下面主要讨论如何进行小波系数估计.

Donoho 提出了一种非常简洁的估计小波系数 $w_{j,k}$ 的方法，对 $f(k)$ 连续做几次小波分解之后，由空间分布不均匀信号 $s(k)$ 所对应的各尺度上小波系数 $w_{j,k}$ 在某些特定的位置有较大的值，这些点对应于原始信号 $s(k)$ 的奇变位置和重要信息，而其他大部分位置的 $w_{j,k}$ 值都较小；对于白噪声 $n(k)$，它所对应的小波系数 $w_{j,k}$ 在每一尺度上的分布是均匀的，并随着尺度的增加，

$w_{j,k}$ 系数的幅值有所减小. 因此，通常的去噪办法是寻找一合适的实数 λ 作为阈值，把小于 λ 的小波系数 $w_{j,k}$（主要由噪声 $n(k)$ 引起）设为 0，而对大于 λ 的 $w_{j,k}$（主要由信号 $s(k)$ 引起），则予以保留或进行收缩，从而得到小波系数的估计值 $\hat{w}_{j,k}$，它可理解为基本上是由信号 $s(k)$ 引起的. 然后根据 $\hat{w}_{j,k}$ 进行重构，得到原始信号 $s(k)$ 的逼近 $\hat{f}(k)$.

阈值 λ 的选取，应使得 λ 刚好大于噪声的最大幅值. Donoho 给出的阈值是 $\lambda=\sigma\sqrt{2\ln N}$，这是因为可以证明：噪声系数的最大幅值以较大的概率小于 $\lambda=\sigma\sqrt{2\ln N}$，即

$$\lim_{N\to+\infty}P\left\{\lambda-\frac{\sigma\ln\ln N}{\ln N}\leqslant\max_{0\leqslant k\leqslant N-1}|v_{j,k}|\leqslant\lambda\right\}=1.$$

估计小波系数的方法有两种：

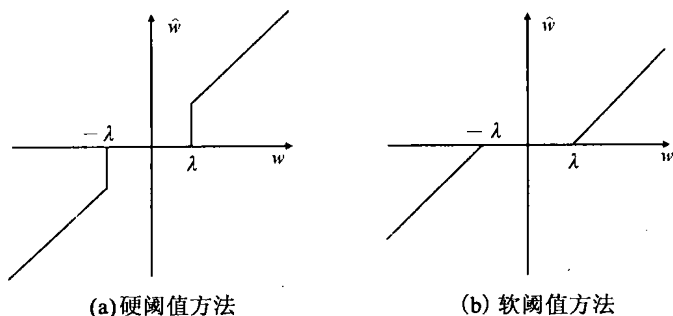
（1）**硬阈值估计法**，其定义为

$$\hat{w}_{j,k}=\begin{cases}w_{j,k}, & |w_{j,k}|\geqslant\lambda,\\ 0, & |w_{j,k}|<\lambda.\end{cases}\tag{8.32}$$

（2）**软阈值估计法**，其定义为

$$\hat{w}_{j,k}=\begin{cases}\operatorname{sgn}(w_{j,k})\cdot(|w_{j,k}|-\lambda), & |w_{j,k}|\geqslant\lambda,\\ 0, & |w_{j,k}|<\lambda.\end{cases}\tag{8.33}$$

图 8-6 说明了这两种方法的区别. 这两种方法尽管都在实际中得到广泛应用，也取得了较好的效果，但方法本身具有潜在的缺点. 对于硬阈值法，由于 $\hat{w}_{j,k}$ 在 $\pm\lambda$ 处是不连续的，所以利用 $\hat{w}_{j,k}$ 得到的重构信号可能会产生一些振荡；而对于软阈值法，估计值 $\hat{w}_{j,k}$ 虽然整体连续性好，但是当 $|w_{j,k}|>\lambda$ 时，$\hat{w}_{j,k}$ 与 $w_{j,k}$ 总存在恒定的偏差，直接影响着重构信号与真实信号的逼近程度. 因此，这又在一定程度上给硬阈值和软阈值方法的应用带来了局限.



(a)硬阈值方法　　(b) 软阈值方法

图 8-6　估计小波系数的软、硬阈值方法

8.3.2 小波系数估计的几种改进模型

在以上基于小波阈值的去噪方法中，步骤(1) 和(3) 分别是小波分解与重构过程，已有现成的算法，因此，该方法的核心是步骤(2)，即小波系数的估计或称阈值处理. 不同的小波系数估计模型，对应于不同的小波阈值去噪方法. 因此，为了克服上述软阈值和硬阈值去噪方法的缺点，只需改进小波系数的估计模型即可.

1. 多项式插值法

由于硬阈值估计在 λ 点处不连续，而软阈值估计在 $w_{j,k}$ 较大时总有一定的偏差，因此去噪效果不是很理想. 为了同时避免这两个缺点，可以通过多项式插值来实现，其模型为

$$\hat{w}_{j,k}=\begin{cases}w_{j,k}, & |w_{j,k}|\geqslant t,\\ \operatorname{sgn}(w_{j,k})P(|w_{j,k}|), & \lambda\leqslant|w_{j,k}|<t,\\ 0, & |w_{j,k}|<\lambda,\end{cases}\tag{8.34}$$

其中，$P(x)$ 为插值多项式. 通常 $P(x)$ 可取二次或三次多项式. 它们的插值条件分别为

$$\begin{cases}P(\lambda)=0,\\ P(t)=t,\\ P'(t)=1\end{cases}\quad 和 \quad\begin{cases}P(\lambda)=0,\\ P'(\lambda)=0,\\ P(t)=t,\\ P'(t)=1.\end{cases}$$

通过简单的推导即可得到二次插值多项式为

$$P(x)=-\frac{1}{(t-\lambda)^2}[\lambda x^2-(\lambda^2+t^2)x+\lambda t^2],\quad \lambda\leqslant x\leqslant t.\tag{8.35}$$

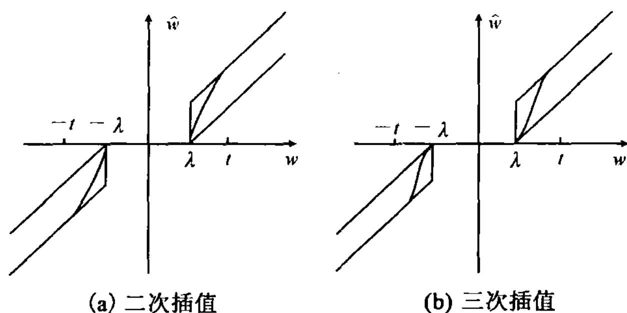
三次插值多项式为

$$\begin{aligned}P(x)=&-\frac{1}{(t-\lambda)^3}[(t+\lambda)x^3-2(t^2+t\lambda+\lambda^2)x^2\\&+\lambda(4t^2+t\lambda+\lambda^2)x-2t^2\lambda^2],\quad \lambda\leqslant x\leqslant t.\end{aligned}\tag{8.36}$$

显然，用多项式插值法确定的小波系数估计值 $\hat{w}_{j,k}$ 在整个定义域内都是连续的，并且若 $P(x)$ 为三次多项式，则 $\hat{w}_{j,k}$ 在整个定义域内都是可导的，因而易于处理，克服了硬阈值方法的不连续性；当 $|w_{j,k}|>t$ 时，$\hat{w}_{j,k}$ 是无偏估计，也弥补了软阈值方法的不足. 图 8-7 给出了小波系数阈值估计的多项式插值模型.

2. 软、硬阈值折中法

小波系数估计的软、硬阈值折中法模型定义为



(a) 二次插值　　(b) 三次插值

图 8-7　估计小波系数的多项式插值阈值方法

$$\hat{w}_{j,k}=\begin{cases}\operatorname{sgn}(w_{j,k})(|w_{j,k}|-\alpha\lambda), & |w_{j,k}|\geqslant\lambda,\\ 0, & |w_{j,k}|<\lambda,\end{cases}\tag{8.37}$$

其中 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. 特别地，当 α 分别取 0 和 1 时，上式即成为硬阈值和软阈值估计方法. 对于一般的 $0<\alpha<1$ 来讲，该方法估计出来的数据 $\hat{w}_{j,k}$ 的大小介于软阈值、硬阈值方法之间，故称之为**软、硬阈值折中法**. 该模型如图 8-8 所示.

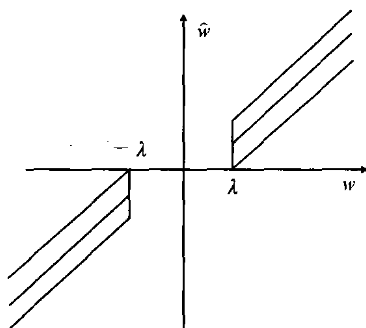


图 8-8　小波系数估计的软、硬阈值折中方法

软、硬阈值折中法的思路很简单，也很通俗，但去噪效果很好. 仔细分析可以发现，由于用单一的软阈值方法估计出来的 $\hat{w}_{j,k}$，其绝对值总比 $w_{j,k}$ 要小 λ ($w_{j,k}\geqslant\lambda$ 时)，因此要设法减小此偏差；但若把这种偏差减小为 0（硬阈值情况）也未必是最好的，因为 $w_{j,k}$ 本身就是由 $u_{j,k}$ 和 $v_{j,k}$ 组成的，它可能由于 $v_{j,k}$ 的影响而使 $|w_{j,k}|>|u_{j,k}|$（对于大多数的 $w_{j,k}$ 来讲），而我们的目的是使 $\|\hat{w}_{j,k}-u_{j,k}\|$ 最小，因此令 $|\hat{w}_{j,k}|$ 的取值介于 $|w_{j,k}|-\lambda$ 与 $|w_{j,k}|$ 之间可能会使估计出来的小波系数 $\hat{w}_{j,k}$ 更加接近于 $u_{j,k}$. 正是基于这一思想，阈值估计模型(8.37)中加入了 α 因子，在 0 与 1 之间适当调整 α 的大小，可以获得更好的去噪效果.

3. **模平方处理方法**

先考虑 $w_{j,k}>0$ 的情形，然后再推广到 $w_{j,k}<0$ 的情形.

在软阀值估计方法中，当 $w_{j,k}>0$ 时，式(8.33) 等价于

$$\hat{w}_{j,k}=\begin{cases}\lambda\left(\dfrac{w_{j,k}}{\lambda}-1\right), & \dfrac{w_{j,k}}{\lambda}\geqslant 1,\\ 0, & \dfrac{w_{j,k}}{\lambda}<1.\end{cases} \tag{8.38}$$

如果把$\dfrac{w_{j,k}}{\lambda}$看成一个整体，则式(8.38)的实际含义为：当$\dfrac{w_{j,k}}{\lambda}\geqslant 1$时，$w_{j,k}$被认为主要是由信号所对应的小波系数，予以保留；否则，$w_{j,k}$被认为主要是由噪声引起的，应当去除. 该模型虽然与软阈值模型是完全等价的，但我们可以从中得到一些启示. 比如，我们可以取

$$\hat{w}_{j,k}=\begin{cases}\lambda\sqrt{\left(\dfrac{w_{j,k}}{\lambda}\right)^2-1}, & \dfrac{w_{j,k}}{\lambda}\geqslant 1,\\ 0, & \dfrac{w_{j,k}}{\lambda}<1.\end{cases} \tag{8.39}$$

即先对$\dfrac{w_{j,k}}{\lambda}$进行平方处理，使得每一个系数与1的偏离程度增大，这样可以促进信噪分离；然后，再对其作软阈值处理；最后，开平方得到$\hat{w}_{j,k}$.

以上讨论的是$w_{j,k}>0$时的情形. 对于一般情况，有

$$\hat{w}_{j,k}=\begin{cases}\operatorname{sgn}(w_{j,k})\sqrt{(w_{j,k})^2-\lambda^2}, & |w_{j,k}|\geqslant\lambda,\\ 0, & |w_{j,k}|<\lambda.\end{cases} \tag{8.40}$$

容易验证，当$|w_{j,k}|\geqslant\lambda$时，有

$$|w_{j,k}|-\lambda\leqslant\sqrt{(w_{j,k})^2-\lambda^2}\leqslant|w_{j,k}|. \tag{8.41}$$

由此可知，用模平方处理法估计出来的小波系数$\hat{w}_{j,k}$的大小也是介于软、硬阈值方法之间的. 当$|w_{j,k}|\geqslant\lambda$时，$\hat{w}_{j,k}$为非线性函数，且当$|w_{j,k}|$不断增大时，$\hat{w}_{j,k}$越来越接近于$w_{j,k}$，如图8-9所示.

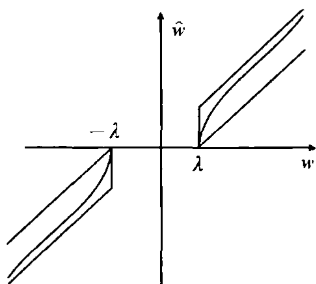


图 8-9 估计小波系数的模平方处理阈值方法

8.3.3 试验结果和模型评价

文献[220]利用软阈值和硬阈值去噪方法以及三种改进模型分别对一段含噪信号进行去噪试验，对于软、硬阈值折中法，取$\alpha=0.5$. 在进行小波分解时，最大分解尺度J取为3，在每一尺度上取不同的阈值λ，即

$$\lambda_j=\frac{\sigma\sqrt{2\ln N}}{\lg(j+1)},$$

其中，σ^2 为噪声的方差，N 为离散采样信号的长度，j 为尺度参数. Donoho 给出的阈值为 $\lambda=\sigma\sqrt{2\ln N}$. 它在不同尺度 j 上是固定的，而本书试验中则取为可变的. 现在对一段信噪比(SNR)为8.226270的含噪信号分别利用以上5种方法进行去噪，然后比较计算结果. 表8-1为各种方法去噪之后恢复信号的信噪比(SNR)和相对均方误差(RMSE)的比较. 由表8-1可以看出，软、硬阈值折中法和模平方处理方法都明显比单一的软阈值和硬阈值方法去噪效果好，而多项式插值方法与软阈值方法相当，也比硬阈值方法好，从而验证了三种改进方法的有效性.

表8-1 **各阈值去噪方法的信噪比(SNR)和相对均方误差(RMSE)比较之一**

估计方法	软阈值法	硬阈值法	二次多项式插值法	三次多项式插值法	软、硬阈值折中法	模平方处理法
SNR	15.276 322	14.331 342	15.152 992	15.288 729	15.582 417	15.367 344
RMSE	0.172 260	0.192 058	0.174 723	0.172 014	0.166 295	0.170 464

由于 λ_j 的选取比较灵活，且有可能影响到各个方法的性能，因此，本书另外又试了一组阈值 λ_j，得到了如表8-2所示的结果.

表8-2 **各阈值去噪方法的信噪比(SNR)和相对均方误差(RMSE)比较之二**

估计方法	软阈值法	硬阈值法	二次多项式插值法	三次多项式插值法	软、硬阈值折中法	模平方处理法
SNR	15.279 865	15.736 609	15.768 925	15.694 912	16.310 060	15.629 050
RMSE	0.172 190	0.163 369	0.162 762	0.164 155	0.152 932	0.165 405

由表8-2可以看出，软、硬阈值折中法的去噪效果最好，多项式插值方法、模平方处理方法跟硬阈值方法基本相当，但明显优于单一的软阈值去噪方法.

需要指出的是，这里 λ_j 的选取并不是最优的，如果 λ_j 选取恰当，则改进模型更能体现出优越性. 另外，对于不同的 λ_j，5种方法的比较结果可能会有一些差异. 但试验表明，一般来讲，单一的软阈值和硬阈值方法稳定性较差，对 λ_j 的依赖性较强，而且对于给定的 λ_j，软阈值和硬阈值方法中至少有一个效果不太好；而模平方处理方法和多项式插值方法则与软阈值和硬阈值方法中较好的一个相当，且较稳定；对于软、硬阈值折中法，则不管 λ_j 如何选择，它总是明显优于单一的软阈值和硬阈值方法.

另外，为了说明软、硬阈值折中法的优越性，文献[220]还对一段含噪的Heavisine信号进行了去噪试验. 图8-10为原始Heavisine信号，图8-11为原始信号中混有高斯白噪声之后的信号，图8-12为利用软、硬阈值折中法去噪之后所得的重构信号. 可以看出，改进的阀值去噪方法的确能够取得非常好的去噪效果，所得重构信号的信噪比增益比传统的去噪方法有了明显的提高.

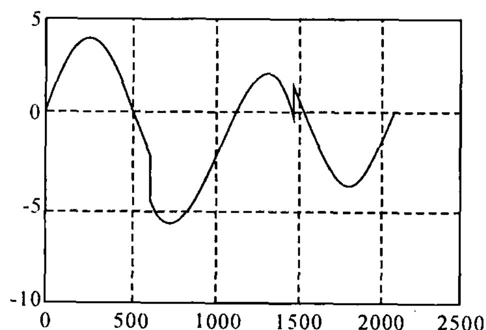


图8-10 原始 Heavisine 信号

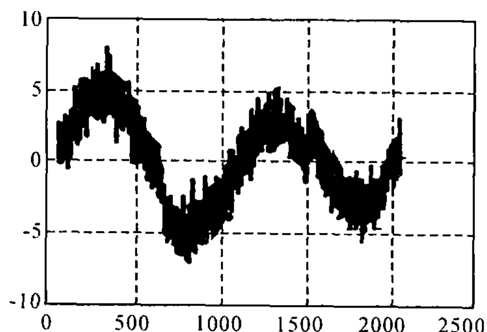


图8-11 含噪的 Heavisine 信号

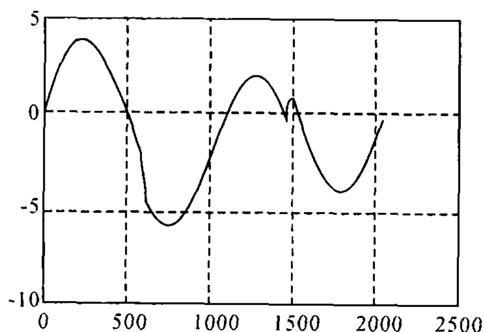


图8-12 消噪之后所得重构信号

8.4 Besov 空间小波图像去噪

在图像去噪中，不仅要考虑重建图像与原始图像的接近程度，而且还要考虑图像的光滑程度，这就需要在两者之间作一个权衡，以此来确定目标函数. 自从Besov空间被引入到非线性逼近领域以来，Besov空间的一些良好的性质逐渐在图像处理中得到应用，DeVore等人成功地建立了Besov空间图像去噪模型，并取得了很好的效果(见文献[26]).

8.4.1 Besov 空间的概念

Besov空间是Besov于20世纪50年代末引入的函数空间，旨在度量光滑性与非常宽泛意义下的可积性. Besov空间涵盖了Hölder空间、Sobolev空间等经典的光滑函数空间.

定义 8.2 设 $f\in L_p(\Omega)$ ，$0<p\leqslant\infty$. **差分算子** $\Delta_h^r(f,x)$ 定义如下：

$$\begin{cases}\Delta_h^0(f,x)=f(x),\\ \Delta_h^{r+1}(f,x)=\Delta_h^r(f,x+h)-\Delta_h^r(f,x), \quad r=0,1,2,\cdots.\end{cases} \tag{8.42}$$

可以证明：$\forall r=0,1,2,\cdots$，有

$$\Delta_h^r(f,x)=\sum_{k=0}^{r}(-1)^{r+k}\binom{r}{k}f(x+kh), \tag{8.43}$$

其中 $\binom{r}{k}=\dfrac{r!}{k!(r-k)!}$. 进一步，$L_p(\Omega)$ 上的**光滑模**定义为

$$\omega_r(f,t)_p=\sup_{|h|\leqslant t}\|\Delta_h^r(f,\cdot)\|_{L^p}. \tag{8.44}$$

定义 8.3 设 $f\in L_p(\Omega)$ ，给定 $\alpha>0$，$0<p,q\leqslant\infty$，选择整数 r，使得 $r-1\leqslant\alpha<r$，定义 f 的 **Besov 半范数**为

$$|f|_{B_q^\alpha(L_p(\Omega))}=\begin{cases}\left[\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(t^{-\alpha}\omega_r(f,t)_p\right)^q\frac{\mathrm{d}t}{t}\right]^{\frac{1}{q}}, & 0<q<\infty,\\ \sup\limits_{t>0}\{t^{-\alpha}\omega_r(f,t)_p\}, & q=\infty.\end{cases} \tag{8.45}$$

如果 f 的 Besov 半范数有限，那么称 f **属于 Besov 空间** $B_q^\alpha(L_p(\Omega))$.

函数 f 的 Besov 范数定义为

$$\|f\|_{B_q^\alpha(L_p(\Omega))}=|f|_{B_q^\alpha(L_p(\Omega))}+\|f\|_{L_p(\Omega)}. \tag{8.46}$$

对于 Besov 空间 $B_q^\alpha(L_p(\Omega))$，α 为光滑阶，q 为第二个光滑指数，在 α,p

给定时，可对光滑空间进行精细的刻画. 特别地，有

(1) $B_{\infty}^{\alpha}(L_{\infty}(\Omega))$ 就是 Hölder 空间 $C^{\alpha}(\Omega)$；

(2) $B_2^{\alpha}(L_2(\Omega))$ 等价于 Sobolev 空间 $S^{\alpha,2}(\Omega)=H^{\alpha}(\Omega)$；

(3) 对于 $p=q$，当$\frac{1}{p}\leqslant\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}$ 时，有 $B_p^{\alpha}(L_p(\Omega))\subset L_2(\Omega)$.

Besov 空间更适合图像去噪，而且 Besov 范数可以表示成关于小波系数的等价范数形式，便于实际处理.

8.4.2 Besov 空间图像去噪模型

在不考虑光滑程度时，Donoho 和 Johnstone 建立的小波阈值去噪法，能得到原始信号的近似最优估计. 但在实际应用中，人们对图像光滑程度的要求不同. 因此我们在去噪时既要兼顾到去噪后图像和原始图像尽量接近，还要满足所需的光滑度. 于是有下面的模型：

给定观测图像即含有噪声的图像 f，通过对 f 的分析，找出原始图像的最好估计 $\hat{f}$. 显然，$\hat{f}$ 应该最接近噪声图像并且满足一定的光滑程度. 相应的数学模型为：给定函数 f，求 $\hat{f}$ 使得

$$\Gamma(g)=\|f-g\|_X+\lambda\|g\|_Y \tag{8.47}$$

最小，其中$\|\cdot\|_X$ 为距离度量，而 $\|\cdot\|_Y$ 用来度量光滑程度，参数 λ 为平衡因子.

用小波处理时，要求信号在 $L_2(\Omega)$ 中，函数 g 自然也应当属于 $L_2(\Omega)$，由(8.47) 式知 g 还应当满足一定的光滑度，所以我们用 Besov 空间中的范数度量，即

$$g\in B_q^{\alpha}(L_p(\Omega))\cap L_2(\Omega). \tag{8.48}$$

对于定义在 $I=[0,1]\times[0,1]$ 上的灰度图像 f，我们取 $X=L_2(I)$，并用 Besov 半范数来度量光滑性，即取 $Y=B_p^{\alpha}(L_p(I))$. 为方便起见，我们令 $B_{p,p}^{\alpha}(I)=B_p^{\alpha}(L_p(I))$. 因此，在 Besov 空间 $B_{p,p}^{\alpha}(I)$ 中，目标函数(8.47) 式变为

$$\Gamma(g)=\|f-g\|_{L_2(I)}+\lambda|g|_{B_{p,p}^{\alpha}(I)}. \tag{8.49}$$

当然对于光滑程度的度量，还有 Sobolev 空间和有界变差函数空间 $BV(I)$ 等. DeVore 在文献[56] 中详细阐述了它们之间的关系，并证明了如下的范数等价关系：

$$|u|_{B_{p,p}^{\alpha}(I)}\asymp\Big(\sum_{j,k,\psi}2^{\alpha kp}2^{k(p-2)}|\langle u,\psi_{jk}\rangle|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{8.50}$$

其中，ψ 为$B_{p,p}^{\beta}(I)$ 上的正交小波，而$\beta>\alpha$. 这里，$A(f)\asymp B(f)$ 是指存在常

数 C_1 和 C_2，使得对所有的 f 有

$$C_1 A(f) \leqslant B(f) \leqslant C_2 A(f).$$

需要指出的是，常数 C_1 和 C_2 依赖于参数 α 和 p，及所使用的小波基.

对于模型(8.50) 的进一步分析与讨论，请参考文献[64],[100].

8.5 小波图像压缩

图像压缩是一种图像数据的编码技术，其目标是通过利用图像数据之间的冗余性来达到减少存贮空间、提高传输效率的目的. 事实上，数据量不等于信息量，任何一幅图像都存在着大量的冗余数据，图像压缩就是采用各种技术来减少这些冗余量，从而达到以尽可能少的代码(符号) 来表示尽可能多的信息，同时，利用人眼视觉系统的生理和心理特性以及图像信源的各种特性来获得较高的压缩比.

8.5.1 图像编码概述

图像是一种二维连续函数，即它的亮度是其位置的连续函数. 为了能在计算机上进行数据处理，首先要在空间上和亮度上对图像进行数字化. 在空间位置上的数字化，称为图像的采样；而亮度上的数字化则是将采样得到的图像亮度离散为整数值，此过程称为量化. 一幅数字图像就是经过采样和量化后的图像数据，从数学上可以看做一个阶数较高的矩阵，其中的元素就是像素值.

图像的相邻像素之间、相邻行之间或者相邻帧之间都存在较强的相关性，也就是图像信号存在诸如空间冗余、时间冗余、结构冗余、视觉冗余和知识冗余等，利用某种编码方法在一定程度上消除这些相关特性或冗余，可以实现图像数据的压缩编码. 若压缩编码过程是尽量将无用的冗余信息去除，恢复的图像与原始图像完全一样，则此过程属无失真编码；若压缩编码是结合人眼的视觉特性，允许恢复的图像(也称重建图像) 有一定的失真，并且这种失真难以被人眼所觉察或者在人的视觉可接受的范围内，则该过程属于失真编码.

评价一种编码方法的压缩效果，一般要从一些主观与客观标准来衡量其性能，即算法的压缩比、压缩后图像恢复的质量、压缩与解压缩的速度(时间) 以及软硬件开销等. 在实际应用中，人们常常采用混合编码方案以同时兼顾性能和经济这两个因素. 由于主观评价恢复图像的质量比较复杂和困

难，因此，在大多数情况下，人们采用峰值信噪比(Peak Signal to Noise Ratio，PSNR)作为评估恢复图像质量的主要尺度.

设原始图像的大小为 $N\times N$，点(k,j)处的像素值为 $f(k,j)$，而重建图像在点(k,j)处的像素值为 $\hat{f}(k,j)$，$k,j=1,2,\cdots,N$，则峰值信噪比 PSNR 定义为

$$\mathrm{PSNR}=10\lg\frac{255\times 255}{\mathrm{MSE}}\quad(\text{单位：dB}),$$

其中，MSE 表示均方误差(Mean Squared Error，MSE)，其定义为

$$\mathrm{MSE}=\frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}(f(k,j)-\hat{f}(k,j))^2.$$

图像压缩包括编码与解码两个过程. 一般编码过程的流程图如图 8-13 所示，大致可分为三个阶段：



图 8-13 图像编码的流程图

1. 图像变换

图像变换也就是图像分解，其目的就是将相关性强的图像数据变换成相关性弱的数据，即变换后数据的能量尽可能集中在少数系数上. 图像变换一般是线性变换(如 KL 变换、Fourier 变换、DCT 变换、小波变换等)，其逆变换一定存在，以便于图像重构.

2. 量化

变换后数据的量化包括两种量化方法：标量量化和矢量量化. 标量量化是对单个像素进行量化，而矢量量化是对一组像素进行量化. 由于量化改变数据值，将损失一些信息，使得恢复图像与原始图像之间产生了误差.

3. 编码

量化后的数据经过无损编码(如 Huffman 编码、算术编码、游程编码等)可以进一步压缩. 无损编码的基本思想是：依据代表数据的符号出现的概率大小重新分配码字，即概率大的符号用低比特码字，概率小的符号用高比特码字.

8.5.2 图像数据的小波变换

对于一幅 $N\times N$ 图像，一般是先按行作 N 个长度为 N 的一维数据的小波

变换，将图像分解成两部分：左边是大小为 $N\times\frac{N}{2}$ 的低频子图像，右边是大小为 $N\times\frac{N}{2}$ 的高频子图像，然后把每个子图像再按列作$\frac{N}{2}$ 个长度为 N 的一维数据的小波变换，于是原始图像被分解成 4 个子图像：

$$LL_1,\ HL_1,\ LH_1,\ HH_1,$$

如图 8-14 所示.

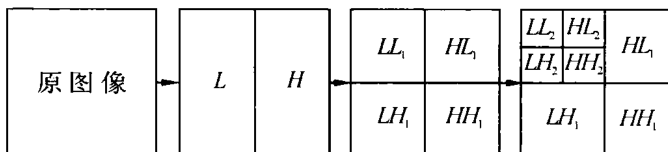


图 8-14　图像数据的小波变换

在上述分解的基础上，再对$\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}$的低频子图像$LL_1$ 进行第二级小波变换，同样得到 4 个子图像：LL_2, HL_2, LH_2, HH_2，如此重复 J 次，就得到 $3J+1$ 个不同尺度的子图像：

$$LL_J, HL_J, LH_J, HH_J, HL_{J-1}, LH_{J-1}, HH_{J-1}, \cdots, HL_1, LH_1, HH_1.$$

图 8-15 与图 8-16 分别给出了 $J=3$ 时的小波子图像的关系与图像的塔式分解(树状) 结构示意图.

8.5.3　嵌入式小波零树压缩

嵌入式小波零树(Embedded Zerotrees of Wavelet, EZW) 压缩方法是由 Shapiro 于 1993 年提出的(见文献[130])，其关键步骤大致可归纳为

(1) 图像的有效(或称重要的) 小波系数的位置与符号的优先传递；

(2) 利用不同尺度之间的小波变换的自相似性对无效(亦称不重要的) 小波系数的位置进行紧凑编码；

(3) 有效小波系数幅值的连续逼近.

我们知道，一幅图像经过小波分解即进行离散小波变换后，被分成了若干个级，例如，分成了 J 级. 对于同一级图像，低频子图像 LL_j 最重要，其次是 HL_j 与LH_j，高频 HH_j 不重要. 对于不同级来说，级高者重要，级低者不重要. 所以，子图像按其重要性总体的排序为

$$LL_J, HL_k, LH_J, HH_J, HL_{J-1}, LH_{J-1}, HH_{J-1}, \cdots, HL_1, LH_1, HH_1,$$

如图 8-15，其中 $J=3$.

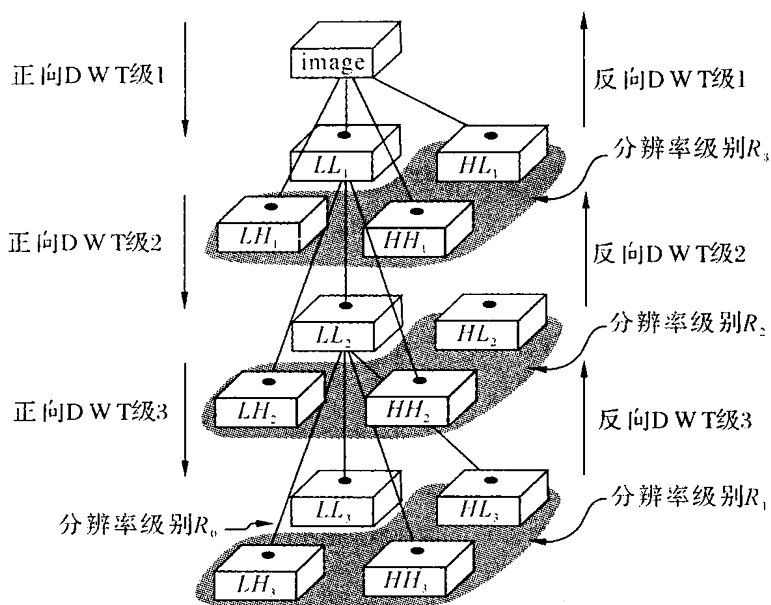


图 8-15　3 级子图像数据示意图

回忆实数的二进制表示. 众所周知，任何一个实数都能用一串二进制数表示出来，这种表示右边的数(位) 越多，表示的就越精确，这就相当于给实数"编码"，而这种"编码" 可以在任何时刻结束，并在此精度上，提供该实数"最好" 的表示.

图像(或数据) 的嵌入式编码实质上与实数的二进制编码类似，它是一个二进制的判断，它以"零" 或"全灰" 图像区分出一个图像. 嵌入式编码把一幅图像变成一个比特流，与实数的二进制表示类似，这些比特是按其重要性进行排序的. 这样，嵌入式编码者可以在任何时刻结束并且提供图像的"最好" 表示.

嵌入式编码有如下特色：

(1) 离散小波变换提供了图像的一个紧凑的多分辨率描述.

(2) 零树编码提供了"重要图" 的一个紧凑的多分辨率表示，这种"重要图" 是指出了重要系数位置的二进制图. 在各个层次上，零树成功地预测了非重要系数，从而有效描述为指数生长树的部分.

(3) 逐次逼近提供了重要系数紧凑的多重精密的表示，并使嵌入式编码得到简化.

(4) 优先协议，由系数的重要性排序.

(5) 合适的多水平(层次) 算术编码，它为符号串的熵编码提供了快速

有效的算法，而并不要求训练或预选存储的表格.

(6) 当达到一个大的比特率或失真目标时，算法可继续运行或停止. 对于给定的比特率，方法可精确达到.

8.5.4 小波系数零树编码

现在，考虑一个典型的变换编码系统，用以阐明给重要图编码的重要性.

一个典型的低比特图像编码有三个基本部分：变换、量化与编码，如图8-13. 首先，原始图像的采样数据通过某种变换产生一组变换系数. 当然，变换应该认为是无损的，尽管在实际计算中这一说法不够确切. 然后，变换系数被量化产生符号流，符号流中的每一个符号对应特殊量化箱中的一个指标. 应当注意到，实际上所有的信息损失都发生在量化阶段. 数据压缩阶段处理符号流则尽可能无损地描述数据流. 再后，熵编码取出有效的字符串，即对字符串作有效的无损失表示. 最后，输出编码后的比特流.

我们的目的是，量化变换系数使得到的箱指标的分布熵，能小到使字符在一个低比特率(例如每像素 0.5 比特)上被熵编码. 使用一个简单的模型，假定得到的符号是独立的，则符号的熵 H 能表示为

$$H=-p\log_2 p-(1-p)\log_2(1-p)+(1-p)(1+H_{NZ}), \quad (8.51)$$

其中，p 是变换系数量化为零的概率，H_{NZ} 是量化为非零的系数绝对值的条件熵. 式(8.51)右端的前两项表示重要图的一阶二进熵，第三项表示非零值的分布的条件熵与字符为非零值的概率之乘积. 因此，对实际字符进行编码的真正代价应为

$$\text{总代价}=\text{重要图的代价}+\text{非零值的代价}. \quad (8.52)$$

返回到模型中，假定目标是 $H=0.5$，则小波系数被量化为零值的概率最小是多少? 如果使用3水平量化器，则 $H_{NZ}=0$，得到

$$P_{\min}\{H_{NZ}=0,\ H=0.5\}=0.916. \quad (8.53)$$

这表明，系数的91.6%必须量化为零，并且给重要图编码的比特占83%. 另一更典型的例子是 $H_{NZ}=4$ 的情形，这时

$$P_{\min}\{H_{NZ}=4,\ H=0.5\}=0.954. \quad (8.54)$$

这时，字符被量化为零值的概率必定增加，而重要图编码的代价是总代价的54%.

下面再来看看使用小波系数零树的重要图的压缩. 为了改善小波系数重要图的压缩，定义一个零树的数据结构.

一个小波系数 x，对于一个给定的阈值 T，如果 $|x|<T$，则称小波系数 x 是不重要的. 如果一个小波系数在一个粗的尺度上关于给定的阈值 T 是不重要的，并且在较细尺度上的相同子带中的所有小波系数也关于阈值 T 是不

重要的，则称这些小波系数形成了一棵零树. 这时，在粗的尺度上的那个小波系数称为母体，它是树根，在较细尺度上相应位置的小波系数称为后代，母体与后代的关系如图 8-16 所示，图中箭头从母体子带指向后代子带. 可以看到，HH_3 中的一个小波系数所描述的一棵小波零树. 当然，小波系数的数据流如图 8-17 排序.

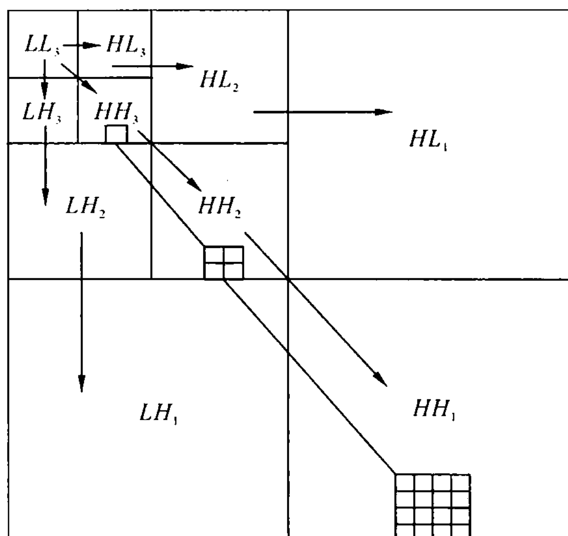


图 8-16 小波子图像的树状结构

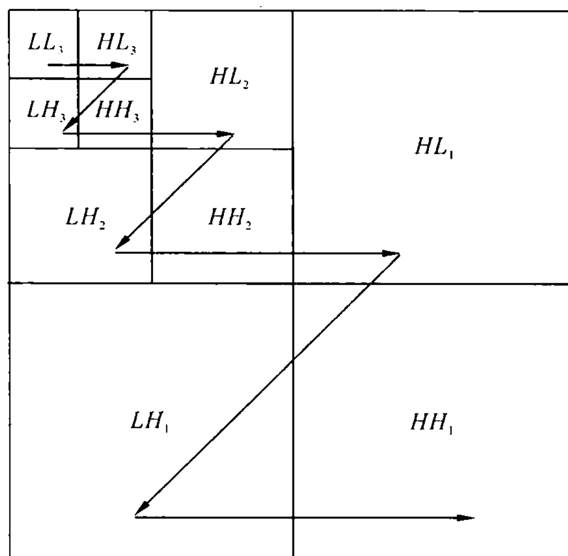


图 8-17 子图像及小波系数的扫描顺序

如果一个小波系数关于阈值 T 是不重要的，但它的后代中存在关于阈值 T 是重要的，则称这个系数是孤立的零. 由上面的定义与分析可以看到，所有的小波系数只是下述三种情形之一：① 零树根，② 孤立零，③ 重要系数. 当然，为了编码的需要可把重要系数分为 ③ 正重要系数 ④ 负重要系数. 这时的 4 个特殊符号用两个比特即可表示，例如：

ZTR(零树根) = 00， IZ(孤立零) = 01，

POS(正重要系数) = 10， NEG(负重要系数) = 11.

对于一幅图像的数据流，图 8-18 给出了其重要图的一个系数编码的流程图.

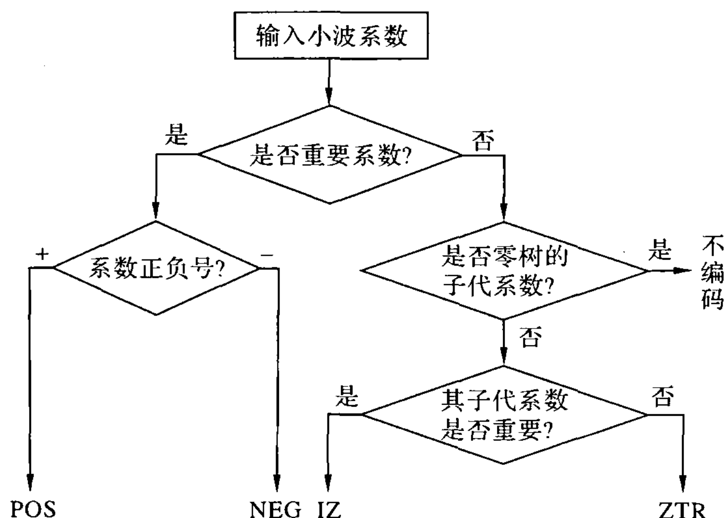


图 8-18 重要图系数编码流程图

8.5.5 逐次逼近量化

为了完成嵌入式编码，我们使用逐次逼近量化(Successive Approximation Quantization，SAQ). 逐次逼近量化是逐次使用阈值序列 $T_0, T_1, \cdots, T_{N-1}$ 以决定重要系数，其中阈值序列的选取满足 $T_i = \dfrac{T_{i-1}}{2}$，而初始阈值 T_0 的选择应使得对于所有系数 x_j，都有 $|x_j| < 2T_0$，为了计算方便，一般取

$$T_0 = M2^E, \tag{8.55}$$

其中，E 是整数，M 是固定常数.

在第 0 步，由于满足 $|x_j| < T_0$ 的系数 x_j 是不重要的，则出现在编码中，它是孤立的零或某一零树的母体或后代，它的值就化为数零，而在原数据图中的剩余值 r_j 是 x_j 本身. 对于满足 $|x_j| \geqslant T_0$ 的重要系数 x_j，当 $x_j > 0$ 时，

它的编码是 POS，这时 x_j 相当于用 $T_0+\frac{T_0}{2}=M2^{E-1}$ 代替，在编码后，原数据图上的剩余值为 $r_j=x_j-3M2^{E-1}$，它满足关系

$$|x_j-3M2^{E-1}|\leqslant\frac{T_0}{2}. \tag{8.56}$$

对于 $x_j<0$ 的重要系数，类似地用NEG编码，这时 x_j 相当于用 $-3M2^{E-1}$ 代替，同样，编码后在原数据图上的剩余值为 $r_j=x_j+3M2^{E-1}$，它也满足(8.56)式. 经过这样的编码后，图像分解后得到的数据图(数据矩阵)，就等于第0步编码恢复后的数据图与第0步剩余数据图之和. 对于用POS与NEG编码后的重要系数，经过第0步编码，在剩余图中原 x_j 位置上的 r_j 满足关系

$$|r_j|\leqslant\frac{T_0}{2}=T_1, \tag{8.57}$$

所以，在第1步对剩余图编码时，虽然大多数系数是不重要的，但还是有一些是重要系数，还要用 POS 或 NEG 编码. 为了解决以上问题，在第0步，对正的重要系数用码 POS0 及 POS1，当 $x_j<3M2^{E-1}$ 时，用 POS0 代替 x_j，这时 x_j 相当于用 $T_0+\frac{T_0}{2}-\frac{T_0}{4}=5M2^{E-2}$ 代替，在 $x_j\geqslant 3M2^{E-1}$ 时，用 POS1 代替 x_j，这时 x_j 相当于用 $T_0+\frac{T_0}{2}+\frac{T_0}{4}=7M2^{E-2}$ 代替，编码后的剩余 r_j 满足

$$|r_j|\leqslant\frac{T_0}{2^2}=T_2. \tag{8.58}$$

对于负的重要系数，可类似地用 NEG0 与 NEG1 进行编码，编码后的剩余 r_j 仍满足式(8.58). 这样，在第0步的重要系数，经编码后，剩余数据图上的对应系数，在第1步编码时，对应的系数一定是不重要的.

所谓第 k 步编码，就是在第 $k-1$ 步剩余图上进行上述编码，这时剩余图上的 x_j 满足

$$|x_j|<2T_k. \tag{8.59}$$

与第0步类似可进行第 k 步编码. 到第 $N-1$ 步时，若剩余图中所有元素都可看做零就结束，这就是逐次逼近量化. 在恢复时，由第0步开始逐次进行解码. 当然，对于这样的编码表，按照实际需要可在任何一处结束.

8.5.6 一个数值算例

考虑一个简单的 8×8 图像的3尺度小波变换，分解后的图像数据在图8-19中给出. 由于最大的系数是63，可选 $T_0=32$，表8-3给出了第0步编码处理过程.

63	−34	49	10	7	13	−12	7
−31	23	14	−13	3	4	6	−1
15	14	3	−12	5	−7	3	9
−9	−7	−14	8	4	−2	3	2
−5	9	−1	47	4	6	−2	2
3	0	−3	2	3	−2	0	4
2	−3	6	−4	3	6	3	6
5	11	5	6	0	3	−4	4

图 8-19　8×8 图像的 3 级小波分解后的图像数据

表 8-3　　**阈值 $T=32$ 时的编码过程**

注 释	子频带	系数值	符 号	重构值
(1)	LL_3	63	POS	48
	HL_3	−34	NEG	−48
(2)	LH_3	−31	IZ	0
(3)	HH_3	23	ZTR	0
	HL_2	49	POS	48
(4)	HL_2	10	ZTR	0
	HL_2	14	ZTR	0
	HL_2	−13	ZTR	0
	LH_2	15	ZTR	0
(5)	LH_2	14	IZ	0
	LH_2	−9	ZTR	0
	LH_2	−7	ZTR	0
(6)	HL_1	7	Z	0
	HL_1	13	Z	0
	HL_1	3	Z	0
	HL_1	4	Z	0
	LH_1	−1	Z	0
(7)	LH_1	47	POS	48
	LH_1	−3	Z	0
	LH_1	2	Z	0

下面是对表 8-3 的注释.

(1) 系数63大于阈值32,使用符号POS代替,它表示[32,64]的中间值48.

(2) 系数 −31 关于阈值 32 是不重要的，而子频带 LH_1 中有它的子女 47，所以这是一个孤立的零.

(3) 系数 23 小于阈值 32，并且在子频带中的对应系数 3，−12，−14，8 是不重要的，且在 LL_1 中的相应系数也全是不重要的，所以用零树符号 ZTR 记这个系数.

(4) 系数 10 小于 32，它的子女都小于 32，所以是零树，10 是零树根.

(5) 系数 14 关于 32 是不重要的，它的后代是 −1，47，−3，2. 由于 47 大于 32，所以用符号 IZ 标记.

(6) 符号 Z（零），只在 HL_1，LH_1，HH_1 中标记，也可写为 IZ 或 ZTR，因为它没有后代.

(7) 系数 47 关于 32 是重要的，用 POS 标记，代表的值是 48.

为了使 POS 与 NEG 的标记更好一些，对这几个重要系数还可用 POS0，POS1，NEG0，NEG1 标记，如表 8-4.

表 8-4　**重要系数实用标记**

系数值	符　号	重构值
63	POS1	56
−34	NEG	−40
49	POS1	56
47	POS0	40

在第 0 步以后，数据剩余图如图 8-20 所示.

7	−6	−7	10	7	13	−12	7
−31	23	14	−13	3	4	6	−1
15	14	3	−12	5	−7	3	9
−9	−7	−14	8	4	−2	3	2
−5	9	−1	7	4	6	−2	2
3	0	−3	2	3	−2	0	4
2	−3	6	−4	3	6	3	6
5	11	5	6	0	3	−4	4

图 8-20　第 0 步后的数据剩余值图

第 1 步以阈值 $T_1=16$ 的编码如表 8-5 所示.

表 8-5　　阈值 $T=16$ 时的编码过程

子频带	系数值	符　号	重构值
LL_3	7	IZ	0
LH_3	−6	ZTR	0
HL_3	−31	NEG1	−28
HH_3	23	POS0	20
LH_2	15	ZTR	0
LH_2	14	ZTR	0
LH_2	−9	ZTR	0
LH_2	−7	ZTR	0
HH_2	3	ZTR	0
HH_2	−12	ZTR	0
HH_2	−14	ZTR	0
HH_2	8	ZTR	0

上述例子只是对小波系数零树压缩方法过程的解释，真正编码时，还要使用一些技巧(见文献[126],[127])，以达到提高压缩比的目的.

在表8-6中给出了对512×512 Lena图像的压缩情况，R为每像素所使用的比特数.

表 8-6　　512×512 Lena 图像零树压缩情况

R	压缩比	PSNR
1.0	8 : 1	39.55
0.5	16 : 1	36.28
0.25	32 : 1	32.16
0.125	64 : 1	30.23
0.062 5	128 : 1	27.54
0.031 25	256 : 1	25.38
0.015 625	512 : 1	23.63
0.007 812 5	1 024 : 1	21.69

习 题 8

1. 已知信号

$$f(t)=\begin{cases}0.37t+1.37, & -1\leqslant t\leqslant 2.8,\\ 1.58t-2.03, & 2.8\leqslant t\leqslant 4.\end{cases}$$

先对 $f(t)$ 进行256点的等距采样，再用Daubechies小波D4作离散小波变换，由此确定 $f(t)$ 的奇异点所在位置并与 $t=2.8$ 进行比较.

2. 试述多尺度微分算子与小波变换的关系及其在信号奇异性检测中的作用.

3. 求函数 $f(t)=|t|^{\alpha}\sin\frac{1}{|t|^{\beta}}$ 及其导数 $f'(t)$ 在 $t=0$ 处的点态Lipschits指数，其中 $\alpha>0$, $\beta>0$.

4. 试述小波变换模极值点、Lipschits指数、平滑因子在信号奇异性检测中的作用. 三者的关系如何?

5. 设信号

$$f(t)=\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{10}}(\sin 2t+2\cos 4t+0.4\sin t\,\sin 50t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

(1) 取 $J=8$，采样间隔为 2^{-J}，将 $f(t)$ 离散化，并用Haar小波实现3级分解;

(2) 取阈值 $\lambda=0.1$，利用硬阈值法去除信号噪声，再重构信号;

(3) 作出重构信号与原信号的图形进行比较，并计算二者的相对误差;

(4) 试验多个不同的阈值，实现上述(2)与(3).

6. 采用软阈值法完成上题的(2),(3)及(4)，并与上题的结果进行分析比较.

7. 运用本章介绍的小波阈值法对Lena,Barbara和Peppers图像进行去噪试验，并分析比较各种方法的去噪效果.

8. 证明差分算子公式(8.43).

9. 分析并讨论Besov空间中的图像去噪模型(8.49)和(8.50).

10. 试用Haar小波和Daubechies小波D4实现对 512×512 Lena图像的小波变换，并比较变换后高频系数的大小. 根据比较结果评价这两种小波应用于图像压缩时的优劣.

11. 试用嵌入式小波零树压缩方法实现对 512×512 Lena图像的压缩编码与重建，并评价重建图像的质量.

第九章　小波与偏微分方程数值解

本章介绍利用小波变换求偏微分方程数值解的 Beylkin-Coifman-Rokhlin 算法，主要包括 Calderón-Zygmund 算子、拟微分算子与 Hilbert 变换等典型的积分算子及其小波表示，算子在正交小波基下的非标准格式与标准格式，利用小波变换求解偏微分方程，以及求解椭圆微分算子逆的约束预处理共轭梯度算法等.

9.1　概　　述

9.1.1　偏微分方程数值解法

偏微分方程是构建科学、工程学和其他领域的数学模型的主要手段，自然界中大量的物理现象都可以用偏微分方程来描述. 例如，较为经典的有

—— Maxwell 方程，用电场和磁场强度、磁通量密度、电荷和电流密度之间的相互关系描述电磁场的状态；

—— Navier-Stokes 方程，用速度、密度、压强及黏度之间的关系描述液体的状态；

—— 线性弹性方程，用应力和应变间的关系描述具有某种特性的弹性体的振动；

—— Schrödinger 方程，量子力学中用质量、内能和总能量的关系描述粒子的波函数；

—— Einstein 方程，广义相对论中用时空弯曲和所含物质的能量密度描述引力场.

一般情况下，大多数偏微分方程都不可能通过有限次的计算得到精确解或解析解，因此需要用数值方法求近似解. 传统的偏微分方程数值解法主要有 3 种：有限元法，有限差分法与谱方法. 利用小波变换求解偏微分方程则是近二十几年迅速发展起来的一种新的数学方法，其实质就是将方程由原来

的坐标系转化到小波系下求解，充分利用算子在小波系下的稀疏特性来简化计算，提高算法实现效率.

小波方法至少在两个方面优于传统方法：

其一，由于小波同时具有光滑性、局部性及对称性等优良特性，因而能够比传统方法更有效地处理局部奇异性问题. 例如，一维信号的阶跃点和二维图像的边缘等都是这种奇异性的体现. 又如，在数值计算中，解的不连续性或奇异性也普遍存在，奇异位置的处理通常会给问题的求解带来很大困难. 将小波用于处理这类数值求解问题，可以充分缓解由奇异性带来的复杂性，有利于提高解的精度.

其二，由于传统方法通常依赖于整个计算域上的信息，所以微分算子离散化的结果虽是稀疏矩阵但条件数很大，而积分算子离散化后则是条件数较小的稠密矩阵. 小波变换具有很好的数据压缩能力，可以将算子表示成比较简单的稀疏矩阵. 对于微分方程，小波可有效地减小离散化方程组系数矩阵的条件数，改善方程组的病态程度，提高算法性能；而积分方程用小波离散化，方程组系数矩阵则是稀疏的，这样就大大减少了计算代价，加快了算法的收敛速度.

小波用于偏微分方程数值解法的研究始于 20 世纪 80 年代末，迄今已发展成为小波在科学与工程计算中的应用研究的主要课题. 归纳起来大致有以下几种主要方法：

(1) 小波伽辽金(Galerkin) 法；

(2) 小波配置(collocation) 法；

(3) 小波有限差分法；

(4) 小波有限元法.

偏微分方程求解是一个非常复杂的问题，方程种类繁多，并且涉及数学分析、物理背景与科学计算等众多学科领域的知识，关于这个问题的研究仍是一个十分活跃的方向. 我们的目的只是以小波和偏微分方程数值解法的切合点为基础，以最简单问题的求解为算例，着重阐述 BCR 算法在求解偏微分方程中的主要思想及实现途径.

9.1.2 几个典型的积分算子

我们知道，经典物理中的许多偏微分方程的求解都归结为求解下列 **Sturm-Liouville** 边值问题：

$$\begin{cases}(p(x)y')' + q(x)y = f(x), \\ a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0, \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0,\end{cases} \tag{9.1}$$

其中 $p(x)$，$p'(x)$ 和 $q(x)$ 都是区间 $[a, b]$ 上的连续函数，且 $p(x)$ 恒取正值，而 a_1, a_2, b_1, b_2 是实常数，满足 $a_1^2 + a_2^2 > 0$，$b_1^2 + b_2^2 > 0$.

容易知道(见文献[53])，上述 Sturm-Liouville 边值问题的解可以表示为

$$y(x) = \int_a^b K(x,t) f(t) \mathrm{d}t, \tag{9.2}$$

这里

$$K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{y_1(t) y_2(x)}{p(t) W(y_1, y_2)(t)}, & a \leqslant t \leqslant x, \\ \dfrac{y_1(x) y_2(t)}{p(t) W(y_1, y_2)(t)}, & x \leqslant t \leqslant b, \end{cases}$$

其中 y_1, y_2 是齐次方程 $(p(x)y')' + q(x)y = 0$ 的两个线性无关解，而 $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ 是 $y_1(t), y_2(t)$ 的 Wronsky 行列式.

因此，Sturm-Liouville 边值问题的求解又转化为解如下形式的积分算子：

$$Tf(x) = \int_a^b K(x,y) f(y) \mathrm{d}y. \tag{9.3}$$

事实上，这样的积分算子很普遍，无论是在数学本身还是在其他应用领域都广泛存在. 一般说来，这里的 a 和 b 可以是有限数或者无穷大，而 x 和 y 也可以是 $\mathbf{R}^n$ 中的变量.

下面介绍本章将要重点讨论的几个积分算子.

1. Hilbert 变换

函数 $f(x)$ 的 **Hilbert 变换**定义为

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} \text{ p. v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{x-y} \mathrm{d}y, \tag{9.4}$$

其中 p. v. 表示 Cauchy 主值积分，即

$$\text{p. v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{x-y} \mathrm{d}y = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{f(y)}{x-y} \mathrm{d}y + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{f(y)}{x-y} \mathrm{d}y \right).$$

可以证明：

(1) 设 $f(x) \in L^1(\mathbf{R}) \cap C^1(\mathbf{R})$ 或 $L^2(\mathbf{R}) \cap C^1(\mathbf{R})$，则 $\forall x \in \mathbf{R}$，Hilbert 变换 $Hf(x)$ 有定义.

(2) 设 $f(x) \in L^1(\mathbf{R}) \cap C^1(\mathbf{R})$，$H_\epsilon f(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{|y| \geqslant \epsilon} \frac{f(x-y)}{y} \mathrm{d}y$，其

中 $\varepsilon>0$，则 $\forall\omega\in\mathbf{R}$，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\widehat{H_\varepsilon f}(\omega)=-\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(\omega)\hat{f}(\omega).$$

比 Hilbert 变换(9.4)更为一般的奇异积分算子是

$$H_\Omega f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.\,v.}\int_{\mathbf{R}^n}\frac{\Omega(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^n}\mathrm{d}\boldsymbol{y}, \tag{9.5}$$

其中 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 都是 $\mathbf{R}^n$ 中的变量. 特别，当 $\Omega(\boldsymbol{x})=\frac{x_j}{|\boldsymbol{x}|}$ 时，(9.5)称为 **Riesz 变换**.

2. Calderón-Zygmund 算子

设 $\Omega=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mid\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n,\ \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}\}$ 是 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 中的域，函数 $K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 在 Ω 上有定义. 我们称由

$$Tf(\boldsymbol{x})=\int_{\mathbf{R}^n}K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y} \tag{9.6}$$

定义的连续线性算子 T: $D(\mathbf{R}^n)\to D'(\mathbf{R}^n)$ 是一个 **Calderón-Zygmund 算子**，如果存在常数 C_0,C_1,C_2 以及 $\gamma\in(0,1]$ 使得下述条件成立：

(1) $K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 在 Ω 上局部可积，且

$$|K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\leqslant C_0|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{-n};$$

(2) 若 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\Omega$，且 $|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|\leqslant\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$，则

$$|K(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y})-K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\leqslant C_1|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|^\gamma|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{-n-\gamma};$$

(3) 若 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\Omega$，且 $|\boldsymbol{y}'-\boldsymbol{y}|\leqslant\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$，则

$$|K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}')-K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\leqslant C_1|\boldsymbol{y}'-\boldsymbol{y}|^\gamma|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{-n-\gamma};$$

(4) T 可以延拓成 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 的连续线性算子：$\|T\|\leqslant C_2$.

如果 $\gamma=1$，那么上述条件(2)与(3)可简洁地写成

$$\left|\frac{\partial K}{\partial x_j}\right|+\left|\frac{\partial K}{\partial y_j}\right|\leqslant\frac{C_1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n+1}}\quad(1\leqslant j\leqslant n).$$

3. 线性偏微分算子

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ 表示变量，$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为重指标，其中 a_i 是非负整数，$|\alpha|=\sum_{i=1}^n a_i$，$g_\alpha(\boldsymbol{x})\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. **线性偏微分算子**定义为

$$P(\boldsymbol{x},D)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}g_\alpha(\boldsymbol{x})D^\alpha, \tag{9.7}$$

其中

$$D^\alpha=D_1^{a_1}D_2^{a_2}\cdots D_n^{a_n}=\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\partial_{x_1}\right)^{a_1}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\partial_{x_2}\right)^{a_2}\cdots\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\partial_{x_n}\right)^{a_n},$$

而 i 为虚数单位. 现在，令算子 P 作用于任意的 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 函数 $f(\boldsymbol{x})$. 由于

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}\rangle}\hat{f}(\boldsymbol{\omega})\mathrm{d}\boldsymbol{\omega},$$

故由 Fourier 变换的性质知

$$\begin{aligned}P(\boldsymbol{x},D)f(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}\rangle}\sum_{|\alpha|\leqslant m} g_\alpha(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}^\alpha\hat{f}(\boldsymbol{\omega})\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}\rangle}p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})\hat{f}(\boldsymbol{\omega})\mathrm{d}\boldsymbol{\omega},\end{aligned}$$

因此，如果给定一个多项式 $p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})$，其中 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}\in\mathbf{R}^n$，那么也可以按

$$Pf(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}\rangle}p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})\hat{f}(\boldsymbol{\omega})\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} \tag{9.8}$$

定义线性偏微分算子. 这是一个 Fourier 积分算子.

4. 拟微分算子(Pseudodifferential Operator)

设 X,Y 均为 $\mathbf{R}^n$ 中的域，对于任意给定的实数 m,ρ,δ，且 $0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$，若函数 $a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in C^\infty(X\times Y\times\mathbf{R}^n)$，其中 $\boldsymbol{x}\in X$，$\boldsymbol{y}\in Y$，$\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^n$，且对任意重指标 α,β，存在常数 $C(\alpha,\beta)>0$，使得

$$|\partial_{\boldsymbol{z}}^\alpha\partial_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}^\beta a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})|\leqslant C(\alpha,\beta)(1+|\boldsymbol{z}|)^{m-\rho|\alpha|-\delta|\beta|},$$

则称 $a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in S_{\rho,\delta}^m(X\times Y\times\mathbf{R}^n)$ 或 $a\in S_{\rho,\delta}^m$.

若线性算子 T 可表示为

$$Tf(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n}\int_Y \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle}a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})f(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}, \tag{9.9}$$

其中 $a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in S_{\rho,\delta}^m$，则称 T 是**拟微分算子**.

显然，线性偏微分算子是一个拟微分算子.

9.2 BCR 快速算法

BCR 算法是由 G. Beylkin，R. Coifman 和 V. Rokhlin 于 1991 年首先提出来的，其主要思想是利用正交小波基描述或表示算子，把算子作用于函数的运算转化为矩阵与向量的乘法运算. 有很大一类算子在小波基下的矩阵表示都具有很好的稀疏结构，其中最典型的例子是 Calderón-Zygmund 算子和拟微分算子，这就为设计快速算法求算子对函数的作用提供了方便. 本节将介绍几种最基本的算子在紧支撑正交小波基下的精确显式表示，这些结果在利用小波变换求解偏微分方程中是最基本也是最重要的.

设 $\{V_j, j\in\mathbf{Z}\}$ 构成 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 OMRA，$\varphi(t)$ 是相应的生成元，小波

$\psi(t)$ 具有 N 阶消失矩，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^m \psi(t)\mathrm{d}t = 0, \quad m = 0,1,\cdots,N-1.$$

与本书前面章节不同的是，闭子空间列 $\{V_j\}$ 的嵌套性为

$$\cdots \subset V_{j+1} \subset V_j \subset V_{j-1} \subset \cdots,$$

尺度空间的正交分解为 $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$，双尺度方程为

$$\varphi(t) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{L-1} h_k \varphi(2t-k),$$

$$\psi(t) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{L-1} g_k \varphi(2t-k),$$

其中 $g_k = (-1)^k h_{L-1-k}$，$k = 0,1,\cdots,L-1$. 小波低通滤波器为

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{L-1} h_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}, \quad 且 \sum_{k=0}^{L-1} h_k^2 = 1.$$

此外，

$$\varphi_{jk}(t) = 2^{-\frac{j}{2}}\varphi(2^{-j}t-k),\ \psi_{jk}(t) = 2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}t-k), \quad j,k \in \mathbf{Z}.$$

9.2.1 算子的非标准格式

我们知道，构造空间 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 的小波基有两种方法. 一方面，可以把由尺度函数与小波的二进伸缩与整数平移构成的函数系

$$\{\psi_{jk}(x)\psi_{jl}(y),\ \psi_{jk}(x)\varphi_{jl}(y),\ \varphi_{jk}(x)\psi_{jl}(y)\}_{j,k,l\in\mathbf{Z}}$$

作为 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 的小波基，其中每一个基函数的支撑集都是 $\mathbf{R}^2$ 中的方形区域. 如果用这样的小波基表示算子，那么就称之为**算子的非标准格式**. 另一方面，也可用一维小波基的张量积构造 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 的基，此时基函数的支撑集都是 $\mathbf{R}^2$ 中的矩形区域. 如果用这样的小波基表示算子，那么就称之为**算子的标准格式**. 下面以积分算子的小波表示为例先介绍非标准格式.

1. 积分算子的小波表示

设 T: $L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ 是具有核函数 $K(x,y)$ 的积分算子：

$$Tf(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)\mathrm{d}y, \tag{9.10}$$

这里，a 和 b 可以是有限数或无穷大.

首先，将核函数 $K(x,y)$ 用尺度空间 $V_0 \times V_0$ 的基表示为

$$K(x,y) = \sum_k \sum_l c_{kl}^0 \varphi_{0,k}(x)\varphi_{0,l}(y), \tag{9.11}$$

把(9.11)代入(9.10)式，有

$$Tf(x)=\sum_k\sum_l c_{kl}^0\Big(\int_a^b f(y)\varphi_{0,l}(y)\mathrm{d}y\Big)\varphi_{0,k}(x)$$
$$=\sum_k\big(\sum_l c_{kl}^0 s_0(l)\big)\varphi_{0,k}(x),$$

其中 $s_0(l)=\langle f,\varphi_{0,l}\rangle$. 根据尺度函数的正交性，得

$$s_0'(k)=\langle Tf,\varphi_{0,k}\rangle=\sum_l c_{kl}^0 s_0(l). \tag{9.12}$$

因此，我们有函数 $Tf(x)$ 的近似表示式

$$Tf(x)\approx\sum_k s_0'(k)\varphi_{0,k}(x), \tag{9.13}$$

这里，等号成立当且仅当 $Tf(x)\in V_0$. 我们称(9.13)式为算子 T 的 0 尺度逼近. 由此看来，为了得到 T 的 0 尺度逼近，计算系数 $s_0'(k)$ 是关键. 令 $\boldsymbol{C}_0=(c_{kl}^0)_{L\times L}$，$\boldsymbol{s}_0=(s_0(l))_{L\times1}$，$\boldsymbol{s}_0'=(s_0'(k))_{L\times1}$，则(9.12)式即

$$\boldsymbol{C}_0\boldsymbol{s}_0=\boldsymbol{s}_0'. \tag{9.14}$$

这就是算子 T 的 0 尺度逼近的矩阵形式.

现在，对 $K(x,y)$ 作二维离散小波变换(DWT)，有

$$K(x,y)=\sum_k\sum_l c_{kl}^1\varphi_{-1,k}(x)\varphi_{-1,l}(y)$$
$$+\sum_k\sum_l \alpha_{kl}^1\psi_{-1,k}(x)\psi_{-1,l}(y)$$
$$+\sum_k\sum_l \beta_{kl}^1\psi_{-1,k}(x)\varphi_{-1,l}(y)$$
$$+\sum_k\sum_l \gamma_{kl}^1\varphi_{-1,k}(x)\psi_{-1,l}(y). \tag{9.15}$$

把(9.15)代入(9.10)式，得

$$Tf(x)=\sum_k\sum_l(c_{kl}^1 s_1(l)+\gamma_{kl}^1 d_1(l))\varphi_{-1,k}(x)$$
$$+\sum_k\sum_l(\beta_{kl}^1 s_1(l)+\alpha_{kl}^1 d_1(l))\psi_{-1,k}(x),$$

其中 $s_1(l)=\langle f,\varphi_{-1,l}\rangle$，$d_1(l)=\langle f,\psi_{-1,l}\rangle$. 根据尺度函数与小波的正交性，得

$$\begin{cases}s_1'(k)=\langle Tf,\varphi_{-1,k}\rangle=\sum_l\big(c_{kl}^1 s_1(l)+\gamma_{kl}^1 d_1(l)\big),\\ d_1'(k)=\langle Tf,\psi_{-1,k}\rangle=\sum_l\big(\beta_{kl}^1 s_1(l)+\alpha_{kl}^1 d_1(l)\big).\end{cases} \tag{9.16}$$

因此，我们有函数 $Tf(x)$ 的近似表示式

$$Tf(x)\approx\sum_k\big(s_1'(k)\varphi_{-1,k}(x)+d_1'(k)\psi_{-1,k}(x)\big), \tag{9.17}$$

这里，等号成立当且仅当 $Tf(x)\in V_0$. 上式即算子 T 的 1 尺度逼近. 同样，

把(9.16)式写成矩阵形式即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{\Gamma}_1 & \boldsymbol{C}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}_1 \\ \boldsymbol{s}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}'_1 \\ \boldsymbol{s}'_1 \end{pmatrix}, \tag{9.18}$$

这就是算子 T 的 1 尺度逼近的矩阵表示，其中

$$\boldsymbol{A}_1 = (\alpha^1_{kl}), \quad \boldsymbol{B}_1 = (\beta^1_{kl}), \quad \boldsymbol{\Gamma}_1 = (\gamma^1_{kl}), \quad \boldsymbol{C}_1 = (c^1_{kl})$$

都是$\frac{L}{2} \times \frac{L}{2}$ 矩阵，而

$$\boldsymbol{s}_1 = (s_1(l)), \; \boldsymbol{s}'_1 = (s'_1(k)), \; \boldsymbol{d}_1 = (d_1(l)), \; \boldsymbol{d}'_1 = (d'_1(k))$$

是$\frac{L}{2} \times 1$ 矩阵.

进一步，再对 $K(x,y)$ 作二维 DWT. 根据塔式分解原理，只需对(9.15)式中的第 1 项进行分解，有

$$\begin{aligned} &\sum_k \sum_l c^1_{kl} \varphi_{-1,k}(x) \varphi_{-1,l}(y) \\ = &\sum_k \sum_l c^2_{kl} \varphi_{-2,k}(x) \varphi_{-2,l}(y) + \sum_k \sum_l \alpha^2_{kl} \psi_{-2,k}(x) \psi_{-2,l}(y) \\ &+ \sum_k \sum_l \beta^2_{kl} \psi_{-2,k}(x) \varphi_{-2,l}(y) + \sum_k \sum_l \gamma^2_{kl} \varphi_{-2,k}(x) \psi_{-2,l}(y). \end{aligned}$$

将上式两边用 $f(y)$ 作内积，得

$$\begin{aligned} &\sum_k \sum_l c^1_{kl} s_1(l) \varphi_{-1,k}(x) \\ = &\sum_k \sum_l c^2_{kl} s_2(l) \varphi_{-2,k}(x) + \sum_k \sum_l \alpha^2_{kl} d_2(l) \psi_{-2,k}(x) \\ &+ \sum_k \sum_l \beta^2_{kl} s_2(l) \psi_{-2,k}(x) + \sum_k \sum_l \gamma_2(k,\, l) d_2(l) \varphi_{-2,k}(x), \end{aligned}$$

其中 $s_2(l) = \langle f, \varphi_{-2,l} \rangle$, $d_2(l) = \langle f, \psi_{-2,l} \rangle$. 根据尺度函数与小波的正交性，得

$$\begin{cases} s'_2(k) = \langle Tf, \varphi_{-2,k} \rangle = \sum_l \left(c^2_{kl} s_2(l) + \gamma^2_{kl} d_2(l) \right), \\ d'_2(k) = \langle Tf, \psi_{-2,k} \rangle = \sum_l \left(\beta^2_{kl} s_2(l) + \alpha^2_{kl} d_2(l) \right). \end{cases} \tag{9.19}$$

因此，我们有函数 $Tf(x)$ 的 2 尺度近似表示式

$$Tf(x) \approx \sum_k \left(s'_2(k) \varphi_{-2,k}(x) + d'_2(k) \psi_{-2,k}(x) + d'_1(k) \psi_{-1,k}(x) \right), \tag{9.20}$$

这里，等号成立当且仅当 $Tf(x) \in V_0$. 根据(9.18)与(9.19)式，算子 T 的 2 尺度逼近的矩阵表示可写为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{B}_1 & & \\ \boldsymbol{\Gamma}_1 & \boldsymbol{O} & & \\ & & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{B}_2 \\ & & \boldsymbol{\Gamma}_2 & \boldsymbol{C}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}_1 \\ \boldsymbol{s}_1 \\ \boldsymbol{d}_2 \\ \boldsymbol{s}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}'_1 \\ * \\ \boldsymbol{d}'_2 \\ \boldsymbol{s}'_2 \end{pmatrix}, \tag{9.21}$$

其中 $\boldsymbol{A}_2 = (\alpha_{kl}^2)$，$\boldsymbol{B}_2 = (\beta_{kl}^2)$，$\boldsymbol{\Gamma}_2 = (\gamma_{kl}^2)$，$\boldsymbol{C}_2 = (c_{kl}^2)$ 都是$\frac{L}{4}\times\frac{L}{4}$矩阵，而 $\boldsymbol{s}_2 = (s_2(l))$，$\boldsymbol{s}'_2 = (s'_2(k))$，$\boldsymbol{d}_2 = (d_2(l))$，$\boldsymbol{d}'_2 = (d'_2(k))$ 是$\frac{L}{4}\times 1$ 矩阵.

如此继续下去直至 $j = J$，即可得算子 T 的 J 尺度逼近：

(1) 核函数 $K(x,y)$ 在子空间 $V_0 \times V_0$ 上的投影：

$$\begin{aligned} K(x,y) = & \sum_k \sum_l c_{kl}^J \varphi_{-J,k}(x)\varphi_{-J,l}(y) \\ & + \sum_{j=1}^{J} \sum_k \sum_l \Big(\alpha_{kl}^j \psi_{-j,k}(x)\psi_{-j,l}(y) \\ & + \beta_{kl}^j \psi_{-j,k}(x)\varphi_{-j,l}(y) + \gamma_{kl}^j \varphi_{-j,k}(x)\psi_{-j,l}(y) \Big), \end{aligned} \tag{9.22}$$

其中

$$\begin{cases} \alpha_{kl}^j = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y)\psi_{-j,k}(x)\psi_{-j,l}(y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \\ \beta_{kl}^j = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y)\psi_{-j,k}(x)\varphi_{-j,l}(y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \\ \gamma_{kl}^j = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y)\varphi_{-j,k}(x)\psi_{-j,l}(y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \\ c_{kl}^j = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y)\varphi_{-j,k}(x)\varphi_{-j,l}(y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \end{cases} \tag{9.23}$$

(2) 函数 $f(x)$ 在子空间 V_0 上的投影：

$$f(x) \approx \sum_k s_J(k)\varphi_{-J,k}(x) + \sum_{j=1}^{J}\sum_k d_j(k)\psi_{-j,k}(x), \tag{9.24}$$

其中

$$s_j(k) = \langle f,\varphi_{-j,k}\rangle,\ d_j(k) = \langle f,\psi_{-j,k}\rangle,\quad j = 1,2,\cdots,J.$$

(3) 函数 $Tf(x)$ 在子空间 V_0 上的投影：

$$Tf(x) \approx \sum_k s'_J(k)\varphi_{-J,k}(x) + \sum_{j=1}^{J}\sum_k d'_j(k)\psi_{-j,k}(x), \tag{9.25}$$

其中

$$\begin{cases} s'_j(k) = \langle Tf,\varphi_{-j,k}\rangle = \sum_l \left(c_{kl}^j s_j(l) + \gamma_{kl}^j d_j(l)\right), \\ d'_j(k) = \langle Tf,\psi_{-j,k}\rangle = \sum_l \left(\beta_{kl}^j s_j(l) + \alpha_{kl}^j d_j(l)\right). \end{cases} \tag{9.26}$$

(4) 算子 T 的 J 尺度逼近的矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{B}_1 & & & & & \\ \boldsymbol{\Gamma}_1 & \boldsymbol{O} & & & & & \\ & & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{B}_2 & & & \\ & & \boldsymbol{\Gamma}_2 & \boldsymbol{O} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \boldsymbol{A}_J & \boldsymbol{B}_J \\ & & & & & \boldsymbol{\Gamma}_J & \boldsymbol{C}_J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}_1 \\ \boldsymbol{s}_1 \\ \boldsymbol{d}_2 \\ \boldsymbol{s}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{d}_J \\ \boldsymbol{s}_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}'_1 \\ * \\ \boldsymbol{d}'_2 \\ * \\ \vdots \\ \boldsymbol{d}'_J \\ \boldsymbol{s}'_J \end{pmatrix}, \tag{9.27}$$

其中 $\boldsymbol{A}_j = (\alpha^j_{kl})$, $\boldsymbol{B}_j = (\beta^j_{kl})$, $\boldsymbol{\Gamma}_j = (\gamma^j_{kl})$, $\boldsymbol{C}_j = (c^j_{kl})$ 都是 $2^{-j}L \times 2^{-j}L$ 矩阵, $j = 1,2,\cdots,J$.

现在，我们把上述结果推广到一般算子 T: $L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$. 为此，设 P_j 和 Q_j 分别是从 $L^2(\mathbf{R})$ 到 V_j 与从 $L^2(\mathbf{R})$ 到 W_j 的投影算子(详见(3.42)与(3.43)式)，注意到 $Q_j = P_{j-1} - P_j$，则

$$\begin{aligned} P_0TP_0 &= \sum_{j=1}^{J}(P_{j-1}TP_{j-1} - P_jTP_j) + P_JTP_J \\ &= \sum_{j=1}^{J}[(P_{j-1}-P_j)T(P_{j-1}-P_j) + (P_{j-1}-P_j)TP_j \\ &\quad + P_jT(P_{j-1}-P_j)] + P_JTP_J \\ &= \sum_{j=1}^{J}(Q_jTQ_j + Q_jTP_j + P_jTQ_j) + P_JTP_J \\ &= \sum_{j=1}^{J}(A_j + B_j + \Gamma_j) + T_J, \end{aligned}$$

其中算子 $A_j = Q_jTQ_j$, $B_j = Q_jTP_j$, $\Gamma_j = P_jTQ_j$ $(1 \leqslant j \leqslant J)$, $T_J = P_JTP_J$. 若令 $T_0 = P_0TP_0$ 是 T 在最细尺度上的逼近，则以下三元组的算子集合

$$T = \{A_j, B_j, \Gamma_j\}_{1\leqslant j\leqslant J} \tag{9.28}$$

就是算子 T 的非标准格式. 进一步，定义算子 T_j: $V_j \to V_j$ 为

$$T_j = P_jTP_j = \begin{pmatrix} A_{j+1} & B_{j+1} \\ \Gamma_{j+1} & T_{j+1} \end{pmatrix}, \quad j = 0,1,\cdots,J-1,$$

那么，算子 T 的非标准格式就可以用分块矩阵表示成如图 9-1 所示的形式.

因此，对于具有核函数 $K(x,y)$ 的积分算子 T，注意到算子

$$A_j = Q_jTQ_j: W_j \to W_j, \quad B_j = Q_jTP_j: V_j \to W_j,$$
$$\Gamma_j = P_jTQ_j: W_j \to V_j, \quad T_j = P_jTP_j: V_j \to V_j,$$

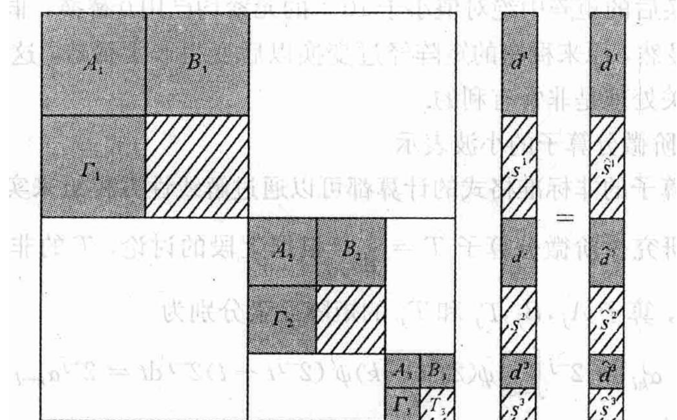


图 9-1　算子 T 在小波系下的非标准格式表示

对应的基函数系分别为

$$\psi_{jk}(x)\psi_{jl}(y), \psi_{jk}(x)\varphi_{jl}(y), \varphi_{jk}(x)\psi_{jl}(y), \varphi_{jk}(x)\varphi_{jl}(y), \quad k,l \in \mathbf{Z}.$$

容易知道，算子 A_j, B_j, Γ_j 和 T_j 所对应的矩阵 $\boldsymbol{A}_j, \boldsymbol{B}_j, \boldsymbol{\Gamma}_j$ 和 $\boldsymbol{C}_j$ 的元素由公式 (9.23) 确定.

例 9.1　考虑一个 256×256 的矩阵 $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$，其中

$$A_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{i-j}, & i \neq j, \\ 0, & i = j. \end{cases}$$

在具有 6 阶消失矩的正交小波系下 $\boldsymbol{A}$ 的非标准格式表示如图 9-2 所示，这个

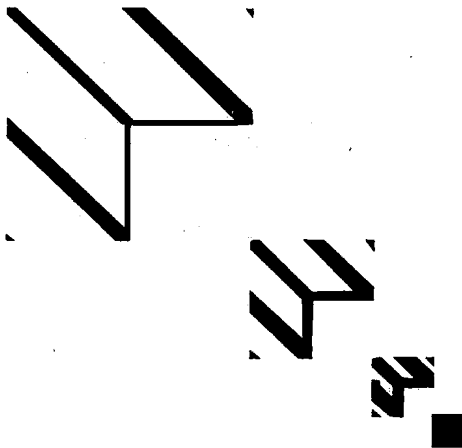


图 9-2　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在小波系下的非标准格式矩阵

经小波变换后的矩阵中绝对值小于 10^{-7} 的元素均已用 0 替换，非零元素以黑色标示. 显然，原来稠密的矩阵经过变换以后变得非常稀疏，这对于后续的计算及相关处理是非常有利的.

2. 一阶微分算子的小波表示

许多算子的非标准格式的计算都可以通过解线性方程组来实现. 作为例子，我们研究一阶微分算子 $T=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. 根据上段的讨论，$T$ 的非标准格式是(9.28) 式，算子 A_j, B_j, Γ_j 和 T_j 的矩阵元素分别为

$$\alpha_{kl}^j = 2^{-j}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(2^{-j}t-k)\psi'(2^{-j}t-l)2^{-j}\,\mathrm{d}t = 2^{-j}\alpha_{k-l}, \tag{9.29}$$

$$\beta_{kl}^j = 2^{-j}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(2^{-j}t-k)\varphi'(2^{-j}t-l)2^{-j}\,\mathrm{d}t = 2^{-j}\beta_{k-l}, \tag{9.30}$$

$$\gamma_{kl}^j = 2^{-j}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(2^{-j}t-k)\psi'(2^{-j}t-l)2^{-j}\,\mathrm{d}t = 2^{-j}\gamma_{k-l}, \tag{9.31}$$

$$c_{kl}^j = 2^{-j}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(2^{-j}t-k)\varphi'(2^{-j}t-l)2^{-j}\,\mathrm{d}t = 2^{-j}r_{k-l}, \tag{9.32}$$

其中

$$\alpha_l = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t-l)\psi'(t)\mathrm{d}t, \tag{9.33}$$

$$\beta_l = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t-l)\varphi'(t)\mathrm{d}t, \tag{9.34}$$

$$\gamma_l = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t-l)\psi'(t)\mathrm{d}t, \tag{9.35}$$

$$r_l = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t-l)\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{9.36}$$

把双尺度方程代入(9.33)，(9.34) 和(9.35) 式，并利用(9.36)，得

$$\begin{cases} \alpha_l = 2\sum_{k=0}^{L-1}\sum_{k'=0}^{L-1} g_k g_{k'} r_{2l+k-k'}, \\ \beta_l = 2\sum_{k=0}^{L-1}\sum_{k'=0}^{L-1} g_k h_{k'} r_{2l+k-k'}, \\ \gamma_l = 2\sum_{k=0}^{L-1}\sum_{k'=0}^{L-1} h_k g_{k'} r_{2l+k-k'}. \end{cases} \tag{9.37}$$

因此微分算子 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 的小波基表示完全取决于 r_l，也就是取决于算子 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 在子空间 V_0 中的表示. 下面考虑如何求 r_l.

在(9.36) 式中将 $\varphi(t)$ 和 $\varphi'(t)$ 都用双尺度方程代入就得到

$$r_l = 2\sum_{k=0}^{L-1}\sum_{m=0}^{L-1} h_k h_m \int_{-\infty}^{+\infty} 2\varphi(2t-2l-k)\varphi'(2t-m)\mathrm{d}t$$
$$= 2\sum_{k=0}^{L-1}\sum_{m=0}^{L-1} h_k h_m r_{2l+k-m}$$

又因为$\sum_{k=0}^{L-1} h_k^2 = 1$，所以上式可以改写为

$$r_l = 2r_{2l} + \sum_{k=1}^{L-1} a_k (r_{2l-k} + r_{2l+k}), \quad l \in \mathbf{Z},$$

其中

$$a_k = 2\sum_{n=0}^{L-k-1} h_n h_{n+k}, \quad k = 1,2,\cdots,L-1. \tag{9.38}$$

根据小波滤波器的正交性质，$a_{2k} = 0$，进一步有

$$r_l = 2r_{2l} + \sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1}(r_{2l-2k+1} + r_{2l+2k-1}). \tag{9.39}$$

记$M_l^{\varphi} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^l \varphi(t)\mathrm{d}t$，$l = 1,2,\cdots,N-1$，利用关系式

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} l^N \varphi(t-l) = t^N + \sum_{l=1}^{N}(-1)^l \binom{N}{l} M_l^{\varphi} t^{N-l} \tag{9.40}$$

和(9.36)式，就可得

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}} l r_l = -1. \tag{9.41}$$

因此，我们证明了以下定理：

定理9.1 如果积分(9.36)存在，那么系数r_l满足线性方程组(9.39)和(9.41)，其中系数a_{2k-1}由(9.38)给定．如果$N \geqslant 2$，那么方程(9.39)和(9.41)有有限长的唯一解r_l，也即$r_l \neq 0$，$-L+2 \leqslant l \leqslant L-2$且$r_l = -r_{-l}$．

顺便指出，如果$N = 1$，那么方程组(9.39)和(9.41)有唯一解，但是积分(9.36)未必绝对收敛．

例 9.2 对于 Haar 小波，由于$h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$，所以$a_1 = 1$，$r_1 = -\frac{1}{2}$，从而得到最简单的有限差分算子$\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$．这时尺度函数$\varphi(t)$不连续，

$$\hat{\varphi}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{2}} \frac{1}{\omega} \sin\frac{\omega}{2},$$

所以积分(9.36)不绝对收敛.

例 9.3 考虑 $L=4$ 的 Daubechies 正交小波 D4:

$$h_0 = 2^{-\frac{1}{2}}\frac{\nu(\nu-1)}{\nu^2+1},\quad h_1 = 2^{-\frac{1}{2}}\frac{1-\nu}{\nu^2+1},$$

$$h_2 = 2^{-\frac{1}{2}}\frac{\nu+1}{\nu^2+1},\quad h_3 = 2^{-\frac{1}{2}}\frac{\nu(\nu+1)}{\nu^2+1},$$

其中 ν 为任意实数，这时

$$a_1 = \frac{1+3\nu^2}{(\nu^2+1)^2},\quad a_3 = \frac{\nu^2(\nu^2-1)}{(\nu^2+1)^2},$$

以及

$$r_1 = -\frac{(1+\nu^2)^2}{2(3\nu^4+1)},\quad r_2 = -\frac{(1-\nu^2)^2}{2(3\nu^4+1)}.$$

下面再详细研究 Daubechies 正交小波族，滤波器长度 $L=2N$，其中 N 为消失矩阶数. 此时

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{2N-1} h_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega}.$$

利用关系式(见文献[47])

$$|H(\omega)|^2 = 1 - \frac{(2N-1)!}{[(N-1)!]^2 2^{2N-1}}\int_0^{\omega}\sin^{2N-1}t\,\mathrm{d}t$$

并计算$\int_0^{\omega}\sin^{2N-1}t\,\mathrm{d}t$，我们有

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{C_N}{2}\sum_{m=1}^{N}\frac{(-1)^{m-1}\cos(2m-1)\omega}{(N-m)!(N+m-1)!(2m-1)},\tag{9.42}$$

其中

$$C_N = \left[\frac{(2N-1)!}{(N-1)!4^{N-1}}\right]^2.$$

根据正交小波滤波器组完全重构条件

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega+\pi)|^2 = 1$$

可知，低通滤波器 $H(\omega)$ 必须满足

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N} a_{2m-1}\cos(2m-1)\omega.$$

比较上式与(9.42)式，可得

$$a_{2m-1} = \frac{(-1)^{m-1}C_N}{(N-m)!(N+m-1)!(2m-1)},\quad m=1,2,\cdots,N.\tag{9.43}$$

于是，对于给定的消失矩阶数 N，根据定理 9.1 就可以计算相应的系数 r_l. 下面列出了 $N=2,3,4$ 时的计算结果:

(1) 当 $N=2$ 时，

$$a_1=\frac{9}{8},\quad a_3=-\frac{1}{8};\quad r_1=-\frac{2}{3},\quad r_2=\frac{1}{12}.$$

(2) 当 $N=3$ 时，

$$a_1=\frac{75}{64},\quad a_3=-\frac{25}{128},\quad a_5=\frac{3}{128};$$

$$r_1=-\frac{272}{365},\quad r_2=\frac{53}{365},\quad r_3=-\frac{16}{1\,095},\quad r_4=-\frac{1}{2920}.$$

(3) 当 $N=4$ 时，

$$a_1=\frac{1\,225}{1\,024},\quad a_3=-\frac{245}{1\,024},\quad a_5=\frac{49}{1\,024},\quad a_7=-\frac{5}{1\,024};$$

$$r_1=-\frac{39\,296}{49\,553},\quad r_2=\frac{76\,113}{396\,424},\quad r_3=-\frac{1\,664}{49\,553},$$

$$r_4=\frac{2\,645}{1\,189\,272},\quad r_5=\frac{128}{743\,295},\quad r_6=-\frac{1}{1\,189\,272}.$$

需要指出的是，为了在计算机上编程计算 r_l，可以根据(9.39)和(9.41)式构造一个迭代算法. 例如，取初值 $r_{-1}=0.5$，$r_1=-0.5$，并注意到 $r_{-l}=-r_l$，反复使用(9.39)与(9.41)，即可求得 r_l 满足指定精度要求的近似值. 此外，还可以证明(见文献[17])

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}} r_l=0,$$

并利用这一等式检验计算结果的正确性.

图 9-3 即为算子 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 在小波系下的非标准格式的矩阵表示，这是一个稀疏



图 9-3 微分算子 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 的非标准格式

性很好的带宽矩阵. 当正交小波滤波器的长度为 L 时，矩阵带宽为 $2L-3$，只与小波基的选择有关.

3. 高阶微分算子的小波表示

正如一阶微分算子 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 一样，n 阶微分算子 $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}$ 的非标准格式也完全取决于它在子空间 V_0 上的表示，也即取决于系数

$$r_l^{(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t-l) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\varphi(t)\,\mathrm{d}t, \quad l \in \mathbf{Z}, \tag{9.44}$$

或者等价地

$$r_l^{(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (-\mathrm{i}\omega)^n |\hat{\varphi}(\omega)|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}l\omega}\,\mathrm{d}\omega. \tag{9.45}$$

类似于定理 9.1 的证明，我们有以下定理：

定理 9.2 如果积分(9.44)或(9.45)存在，那么

(1) 系数 $r_l^{(n)}$，$l \in \mathbf{Z}$ 满足线性方程组

$$r_l^{(n)} = 2^n\left[r_{2l}^{(n)} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1}(r_{2l-2k+1}^{(n)} + r_{2l+2k-1}^{(n)})\right] \tag{9.46}$$

和

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}} l^n r_l^{(n)} = (-1)^n n!, \tag{9.47}$$

其中系数 a_{2k-1} 由(9.38)式给定.

(2) 当消失矩阶数 $N \geqslant \frac{1}{2}(n+1)$ 时，方程组(9.46)和(9.47)有有限长的唯一解 $r_l^{(n)}$，也即 $r_l^{(n)} \neq 0$，$-L+2 \leqslant l \leqslant L-2$. 并且当 n 为偶数时，有

$$r_l^{(n)} = r_{-l}^{(n)},$$

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}} l^{2m} r_l^{(n)} = 0, \quad m = 1,2,\cdots,\frac{1}{2}n-1,$$

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}} r_l^{(n)} = 0;$$

当 n 为奇数时，有

$$r_l^{(n)} = -r_{-l}^{(n)}, \quad \sum_{l\in\mathbf{Z}} l^{2m-1} r_l^{(n)} = 0,\ m = 1,2,\cdots,\frac{1}{2}(n-1).$$

我们注意到，(9.45)式可以改写为

$$r_l^{(n)} = \int_0^{2\pi} \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2 (-i)^n (\omega+2k\pi)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}l\omega}\,\mathrm{d}\omega,$$

所以，若记 $\hat{r}^{(n)}(\omega)=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} r_k^{(n)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}$，则

$$\hat{r}^{(n)}(\omega)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2(-i)^n(\omega+2k\pi)^n.$$

因为 $\hat{\varphi}(\omega)=H\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$，所以

$$\hat{r}^{(n)}(\omega)=2^n\left[\left|H\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2\hat{r}^{(n)}\left(\frac{\omega}{2}\right)+\left|H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right|^2\hat{r}^{(n)}\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right].$$

设 M_0 是按如下定义作用在 2π 周期函数 f 上的算子：

$$(M_0f)(\omega)=\left|H\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2f\left(\frac{\omega}{2}\right)+\left|H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right|^2f\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right),$$

注意到 $\hat{r}^{(n)}(\omega)$ 是 2π 周期函数，所以

$$M_0\hat{r}^{(n)}=2^{-n}\hat{r}^{(n)},\tag{9.48}$$

也就是说，$\hat{r}^{(n)}$ 是算子 M_0 对应于特征值 2^{-n} 的特征向量. 因此求微分算子 $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}$ 的小波基表示就等价于求方程(9.48)的三角多项式解.

4. 卷积算子的小波表示

对于卷积算子，其非标准格式的计算比一般算子的计算要简单得多，这是因为尺度函数的自相关函数具有消失矩特性. 具体说来，设 T 为卷积算子，$t_{m-l}^{(j-1)}(m,l\in\mathbf{Z})$ 表示到子空间 V_{j-1} 上的算子 $P_{j-1}TP_{j-1}$ 在小波基下的矩阵，为了计算 P_jTP_j 的矩阵表示，利用(见文献[16])

$$t_l^{(j)}=\sum_{k=0}^{L-1}\sum_{m=0}^{L-1}h_kh_mt_{2l+k-m}^{(j-1)},$$

进一步化简得

$$t_l^{(j)}=t_{2l}^{(j-1)}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L/2}a_{2k-1}\left(t_{2l-2k+1}^{(j-1)}+t_{2l+2k-1}^{(j-1)}\right),\tag{9.49}$$

其中系数 a_{2k-1} 由(9.38)式确定. 此外，我们还有

$$t_l^{(j)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}K(x-y)\varphi_{j,0}(y)\varphi_{j,l}(x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

交换积分次序，得

$$t_l^{(j)}=2^j\int_{-\infty}^{+\infty}K(2^j(l-y))\Phi(y)\mathrm{d}y,\tag{9.50}$$

其中 K 是算子 T 的核函数，而

$$\Phi(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\varphi(t-y)\mathrm{d}t$$

是尺度函数 φ 的自相关函数. 可以证明：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(y)\mathrm{d}y = 1, \tag{9.51}$$

以及

$$M_{\Phi}^{m} = \int_{-\infty}^{+\infty} y^m\Phi(y)\mathrm{d}y = \left[\left(\frac{1}{i}\partial_\omega\right)^m |\hat{\varphi}(\omega)|^2\right]_{\omega=0}$$
$$= \left[\left(\frac{1}{i}\partial\omega\right)^m \left|H\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2\right]_{\omega=0} = 0, \tag{9.52}$$

其中 $m=1,2,\cdots,2N-1$. 也就是说，自相关函数 Φ 具有消失矩性质，这样直接计算(9.50)式就相当方便.

事实上，我们还可以通过求解满足渐近条件的线性方程组(9.49)来计算卷积算子的小波表示. 这种方法在算子具有一定的齐次性时显得特别简单，因为这时算子完全由它在子空间 V_0 上的表示所决定. 下面就来考虑这种算子的两个例子：Hilbert 变换和分数阶微分(fractional differentiation).

例 9.4 计算 Hilbert 变换的非标准格式

根据 Hilbert 变换 H 的定义(9.4)，H 在子空间 V_0 上的小波表示所对应的矩阵元素就由下式给出：

$$r_l = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t-l)(H\varphi)(t)\mathrm{d}t, \quad l\in\mathbf{Z}. \tag{9.53}$$

这就完全确定了非标准格式的所有系数，即 $H=\{A_j,B_j,\Gamma_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$，其中 $A_j = A_0$，$B_j=B_0$ 及 $\Gamma_j=\Gamma_0$，对应于 A_0,B_0 和 Γ_0 的矩阵元素 α_{k-l},β_{k-l} 和 γ_{k-l} 都用系数 r_l 计算：

$$\alpha_i = \sum_{k=0}^{L-1}\sum_{k'=0}^{L-1} g_k g_{k'} r_{2i+k-k'},$$

$$\beta_i = \sum_{k=0}^{L-1}\sum_{k'=0}^{L-1} g_k h_{k'} r_{2i+k-k'},$$

$$\gamma_i = \sum_{k=0}^{L-1}\sum_{k'=0}^{L-1} h_k g_{k'} r_{2i+k-k'},$$

且 r_l，$l\in\mathbf{Z}$ 满足线性方程组

$$r_l = r_{2l} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1}(r_{2l-2k+1} + r_{2l+2k-1}), \tag{9.54}$$

其中 a_{2k-1} 由(9.38)式确定. 利用(9.50),(9.51)和(9.52)式可得，对于较大的 l，有 r_l 的渐近式

$$r_l = -\frac{1}{\pi l} + O\left(\frac{1}{l^{2N}}\right). \tag{9.55}$$

利用 φ 的 Fourier 变换 $\hat{\varphi}(\omega)$，可以把(9.53)式改写成

$$r_l = -2\int_0^{+\infty} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 \sin l\omega \, d\omega,$$

所以 $r_l = -r_{-l}$，且 $r_0 = 0$. 根据渐近条件(9.55)求解(9.54)就可以计算任意指定精度的系数 $r_l (l \neq 0)$. 这个算法可以直接推广到计算高维空间的 Riesz 变换的系数.

作为例子，取具有 6 阶消失矩的 Daubechies 正交小波，计算 Hilbert 变换算子对应的系数 r_l，精度要求为 10^{-7}，根据(9.55) 式，就得到表 9-1 所示的系数(注意到 $r_l = -r_{-l}$，$r_0 = 0$).

表 9-1　**Hilbert 变换在具有 6 阶消失矩的 Daubechies 正交小波基下的系数 r_l**

l	r_l	l	r_l
1	−0.588 303 698	9	−0.035 367 761
2	−0.077 576 414	10	−0.031 830 988
3	−0.128 743 695	11	−0.028 937 262
4	−0.075 063 628	12	−0.026 525 823
5	−0.064 168 018	13	−0.024 485 376
6	−0.053 041 366	14	−0.022 736 420
7	−0.045 470 650	15	−0.021 220 659
8	−0.039 788 641	16	−0.019 894 368

例 9.5　计算分数阶微分的非标准格式

考虑按下式定义的分数阶微分算子

$$(\partial_t^\alpha f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-y)_+^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} f(y)\mathrm{d}y, \tag{9.56}$$

其中 $\alpha \neq 1,2,\cdots$. 当 $\alpha < 0$ 时，(9.56) 式定义的就是**分数阶反微分算子**(fractional antiderivatives).

算子 ∂_t^α 在子空间 V_0 上的矩阵表示由系数

$$r_l = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t-l)(\partial_t^\alpha \varphi)(t)\mathrm{d}t, \quad l \in \mathbf{Z}$$

确定(只要这个积分存在). ∂_t^α 的非标准格式为 $\partial_t^\alpha = \{A_j, B_j, \Gamma_j\}_{j\in \mathbf{Z}}$，其中 $A_j = 2^{-\alpha j} A_0$，$B_j = 2^{-\alpha j} B_0$ 及 $\Gamma_j = 2^{-\alpha j}\Gamma_0$，而对应于 A_0, B_0 和 Γ_0 的矩阵元素 $\alpha_{i-l}, \beta_{i-l}$ 和 γ_{i-l} 都由 r_l 得到：

$$\alpha_i = 2^\alpha \sum_{k=0}^{L-1}\sum_{k'=0}^{L-1} g_k g_{k'} r_{2l+k-k'},$$

$$\beta_l = 2^\alpha \sum_{k=0}^{L-1}\sum_{k'=0}^{L-1} g_k h_{k'} r_{2l+k-k'},$$

$$\gamma_l = 2^\alpha \sum_{k=0}^{L-1}\sum_{k'=0}^{L-1} h_k g_{k'} r_{2l+k-k'}.$$

容易验证，系数 r_l 满足下列线性方程组

$$r_l = 2^\alpha\left[r_{2l} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L/2} a_{2k-1}(r_{2l-2k+1} + r_{2l+2k-1})\right],$$

其中 a_{2k-1} 由(9.38)式确定. 利用(9.50),(9.51)和(9.52)式可得，对于较大的 l 有 r_l 的渐近式

$$r_l = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)}\dfrac{1}{l^{1+\alpha}} + O\left(\dfrac{1}{l^{1+\alpha+2N}}\right), & l > 0, \\ 0, & l < 0. \end{cases} \tag{9.57}$$

作为例子，取具有 6 阶消失矩的 Daubechies 正交小波，计算 $\partial_l^{0.5}$ 对应的系数 r_l，精度要求为 10^{-7}. 根据(9.57)式，有

$$r_l = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\dfrac{1}{l^{1+\frac{1}{2}}} + O\left(\dfrac{1}{l^{13+\frac{1}{2}}}\right), & l > 0, \\ 0, & l < 0. \end{cases}$$

计算结果如表 9-2 所示.

表 9-2 $\partial_l^{0.5}$ 在消失矩 $N=6$ 的 Daubechies 正交小波系下的系数 r_l

l	r_l	l	r_l
−7	−2.828 310 17 E−06	4	−2.779 552 93 E−02
−6	−1.686 238 67 E−06	5	−2.613 241 70 E−02
−5	4.458 477 96 E−04	6	−1.917 188 16 E−02
−4	−4.346 334 15 E−03	7	−1.522 728 41 E−02
−3	2.288 217 28 E−02	8	−1.246 674 03 E−02
−2	−8.498 837 59 E−02	9	−1.044 795 00 E−02
−1	0.277 999 63	10	−8.920 619 45 E−03
0	0.846 819 66	11	−7.732 252 46 E−03
1	−0.698 475 77	12	−6.786 145 93E−03
2	2.364 001 39 E−02	13	−6.018 385 99 E−03
3	−8.974 637 80 E−02	14	−5.385 214 59 E−03

9.2.2 算子的标准格式

我们知道，把一个算子用张量积小波基表示就得到该算子的标准格式.

这里，我们并不用这种方式讨论算子标准格式的计算，而着重介绍标准格式和非标准格式之间的联系.

在非标准格式中，三元算子序列中的各个算子组都表示在同一尺度 j 上的作用，即 $A_j: W_j \to W_j$，$B_j: V_j \to W_j$，$\Gamma_j: W_j \to V_j$，并未考虑不同尺度的子空间之间的相互作用. 如果将其拓展到与之相关的子空间序列上，那么就能得到算子的标准格式表示.

设最细和最粗尺度分别为 0 和 J，根据多分辨率分析的概念，对于介于 0 和 J 之间的任一尺度 j，子空间 V_j 可以分解为

$$V_j = V_J \bigoplus_{j'=j+1}^{J} W_{j'}.$$

考虑算子序列 $\{B_j^{j'}, \Gamma_j^{j'}\}_{j'=j+1,\cdots,J}$，其中

$$B_j^{j'}: W_{j'} \to W_j, \quad \Gamma_j^{j'}: W_j \to W_{j'},$$

这样就可得到与非标准格式 $T = \{A_j, B_j, \Gamma_j\}_{j\in \mathbf{Z}}$ 相应的格式

$$T = \{A_j, \{B_j^{j'}\}_{j'>j}, \{\Gamma_j^{j'}\}_{j'>j}\}_{j\in \mathbf{Z}}. \tag{9.58}$$

此外，再增加算子序列 $\{B_j^{J+1}\}$ 和 $\{\Gamma_j^{J+1}\}$，其中

$$B_j^{J+1}: V_J \to W_j, \quad \Gamma_j^{J+1}: W_j \to V_J.$$

这里 B_j^{J+1} 和 Γ_j^{J+1} 就是非标准格式中的 B_J 和 Γ_J.

综上所述，算子 T 的标准格式就是最细尺度上的算子 $T_0 = P_0 T P_0$ 按如下方式表示：

$$T_0 = \{A_j, \{B_j^{j'}\}_{j'=j+1}^{J}, \{\Gamma_j^{j'}\}_{j'=j+1}^{J}, B_j^{J+1}, \Gamma_j^{J+1}, T_J\}_{j=1,2,\cdots,J}. \tag{9.59}$$

其分块矩阵形式表示如图 9-4 所示.

图 9-4 算子 T 在小波系下的标准格式

例 9.6 续例 9.1，仍以 256×256 的矩阵 $\boldsymbol{A}=(A_{ij})$ 为例，其中

$$A_{ij}=\begin{cases}\dfrac{1}{i-j}, & i\neq j,\\ 0, & i=j.\end{cases}$$

在具有 6 阶消失矩的正交小波系下 $\boldsymbol{A}$ 的标准格式表示如图 9-5 所示，这个经小波变换后的矩阵中绝对值小于 10^{-7} 的元素均已用 0 替换，非零元素以黑色标示.

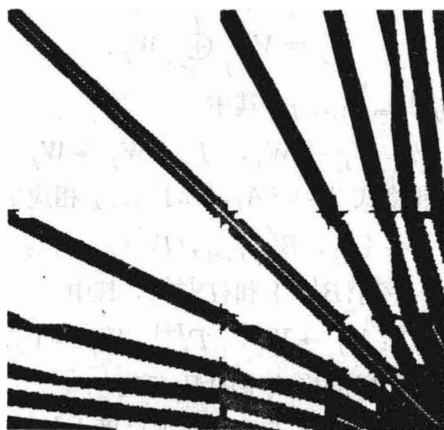


图 9-5 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在小波系下对应的标准格式矩阵

如果 T 是 Calderón-Zygmund 算子或拟微分算子，那么在给定的精度要求下，(9.59) 式中的各个子算子除 T_J 外对应的矩阵都是带宽的，且宽度与尺度 j 的大小密切相关. 对一大类算子(如拟微分算子)而言，不同尺度 j 和 j' 的矩阵元素间的相关性随 $|j-j'|$ 的增加而迅速减弱. 因此，若 j 和 j' 相距甚远，那么在一定精度范围内，$B_j^{j'}$，$\Gamma_j^{j'}$ 可以忽略.

有两种方法可用来计算算子矩阵的标准格式. 一种方法是先对矩阵的各行作一维小波变换，然后对变换结果的各列再作一次一维小波变换；另一种方法就是先计算非标准格式，再对其中的子算子 B_j 的各行和算子 Γ_j 的各列分别作一维小波变换.

9.2.3 算子的小波稀疏逼近

正如我们已经看到的，具有某些特定性质的稠密算子在小波基下可以用稀疏性很好的矩阵来表示，小波的这种压缩能力对于采用数值方法处理算子问题特别是求解微分方程提供了十分有效的计算工具. 下面我们就来讨论小

波基对算子表示的压缩能力.

如果 T 是 Calderón-Zygmund 算子或拟微分算子，所使用的小波具有 N 阶消失矩，那么在非标准格式中三元组$\{A_j, B_j, \Gamma_j\}_{j\in \mathbf{Z}}$ 对应的矩阵元素以大约$\frac{1}{d^{N+1}}$的速度下降，其中 d 是矩阵元素到对角线的距离. 如果在一定精度范围内将所有足够小的元素都视为零，那么算子的非标准格式矩阵表示就是带宽的，也即稀疏的. 具体地说，有

定理9.3 如果算子 T 的核函数 $K(x,y)$ 满足

$$|K(x,y)| \leqslant \frac{1}{|x-y|}, \tag{9.60}$$

$$\left|\frac{\partial^N}{\partial x^N}K(x,y)\right| + \left|\frac{\partial^N}{\partial x^N}K(x,y)\right| \leqslant \frac{C_0}{|x-y|^{1+N}}, \tag{9.61}$$

其中 N 为小波的消失矩阶数，那么必存在常数 C_N，使得 T 的小波非标准格式表示中的矩阵元素 $\alpha_{kl}^j, \beta_{kl}^j, \gamma_{kl}^j$ 满足：$\forall\ |k-l| \geqslant 2N$，有

$$|\alpha_{kl}^j| + |\beta_{kl}^j| + |\gamma_{kl}^j| \leqslant \frac{C_N}{1+|k-l|^{1+N}}. \tag{9.62}$$

如果核函数 $K(x,y)$ 还满足：$\forall I$（二进区间），都有

$$\left|\iint_{I\times I} K(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant C|I|,$$

那么(9.62)式对任意 k, l 均成立.

由此可知，在小波系下算子矩阵的元素主要集中在对角线附近，离对角线愈远的元素绝对值愈小. 于是，可令算子 T_0 的非标准格式对应的矩阵中所有距离对角线$\frac{B}{2}$以外的元素均为零($B \geqslant 2N$)，这样就得到一个带宽矩阵（带宽为 B）及与之相应的算子 T_0^B，如果用 T_0^B 作为 T_0 的一个逼近，那么

$$\| T_0^B - T_0 \| \leqslant \frac{C_K}{B^N} \cdot \log_2 M,$$

其中 C_K 是只与核函数 K 有关的常数，$\log_2 M$ 是矩阵表示中的尺度数目. 在大多数数值计算中，若给定计算精度 ε，小波的消失矩阶数 N，则根据(9.61)式，只要选择带宽 B 满足

$$B \geqslant \left(\frac{C_K \cdot \log_2 M}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{N}},$$

就可以使计算结果达到预期的精度.

9.3 利用小波变换求解偏微分方程

根据上一节的讨论可知，包括 Calderón-Zygmund 算子和拟微分算子在内的一大类算子都可以在小波基下用稀疏矩阵(带宽矩阵)表示. 例如考虑积分算子

$$Tf(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,y)f(y)\mathrm{d}y,$$

并构造它在二维小波基下的矩阵表示，就可以发现该矩阵的各个子块中元素值(作为关于它到对角线距离的函数)的下降速度要比原来核函数值的下降速度快得多，且小波消失矩的阶数越大，下降得越快. 于是，我们可以在给定精度要求下对每个子矩阵元素作带宽近似，进而构造快速算法，减少计算量提高算法效率.

9.3.1 问题概述

这一节的目的是以椭圆边值问题为例阐述如何利用小波求解偏微分方程. 那么，与传统方法相比，小波的使用究竟意味着什么呢?

按照数值分析的观点，用传统方法求解积分方程和求解微分方程边值问题是有显著差别的. 微分方程离散化的结果是一个条件数很大的稀疏的线性方程组，而积分方程离散化的结果则是条件数较小的稠密的线性方程组. 更确切地说，微分算子对应的矩阵的条件数随步长的减小或方程组规模的增大以多项式速度增大. 例如，二阶有限差分算子的离散化矩阵的条件数以$\frac{1}{h^2}$(或 N^2) 的速度增大，其中 h 为步长，N 是离散化的点数；而第二类积分方程的离散化矩阵的条件数不随步长的减小而增加，但矩阵是稠密的. 然而，在小波坐标系下情况就不一样了. 对于微分方程求解，小波可有效地减小系数矩阵的条件数，改善方程组的病态程度，提高算法性能；而对于积分方程来说，在小波系下原来较为稠密的系数矩阵被稀疏矩阵取而代之，这样就大大减少了计算代价(cost)，加快了求解速度. 为简单起见，下面主要介绍小波在微分方程求解中的应用，至于积分方程求解，其本质思想是一致的，这里就不赘述了.

在多重网格法或多水平法等经典方法中，Green 函数的矩阵表示中一般有 $O(N^2)$ 非零元素，很难得到构造该矩阵的快速算法，但在小波基下 Green

函数的矩阵表示中只有 $O(N)$ 非零元素，其构造只需$O(N)$ 运算，并且原问题的求解就转化为矩阵和向量相乘，即在小波系下所需的运算量下降为 $O(N)$. 基于以上事实，这里主要描述如何用快速算法构造 Green 函数.

此外，为了提高收敛速度，进一步减小条件数，克服数值不稳定性，需要对离散的线性方程组进行预处理. 我们把用来作预处理的矩阵称为**预乘子**或**预处理器**(preconditioner). 对于带有周期边界条件的椭圆方程，在小波系下总存在对角预乘子，使得算法仅仅与条件数为 $O(1)$ 的稀疏矩阵的代数运算有关，因而是 $O(N)$ 算法，其中 N 是离散化后的线性方程组的规模.

9.3.2 两点边值问题及其差分格式

考虑带有 **Dirichlet 边界条件**的两点边值问题

$$\begin{cases} Lu \equiv \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a(t)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) = f(t), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{9.63}$$

其中 $a(t)$ 足够光滑且 $a(t) > 0$，$t \in (0,1)$. 这里所描述的方法也适用于更一般的椭圆型微分算子，如

$$Lu \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a(t)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) - b(t)u,$$

其中 $b(t) > 0$.

首先采用交错差分格式将问题(9.63)离散化，得到如下线性方程组：

$$a_{i-\frac{1}{2}}u_{i-1} - (a_{i-\frac{1}{2}} + a_{i+\frac{1}{2}})u_i + a_{i+\frac{1}{2}}u_{i+1} = h^2 f_i, \quad i = 1,2,\cdots,N, \tag{9.64}$$

其中 h 是步长，而

$$u_i = u(t_i),\ a_{i+\frac{1}{2}} = a(t_{i+\frac{1}{2}}),\ f_i = f(t_i),\ t_i = ih,\ t_{i+\frac{1}{2}} = \left(i + \frac{1}{2}\right)h,$$

并且令 $u_0 = u_{N+1} = 0$. 这样(9.64)式就可以写为

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}, \tag{9.65}$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 为 $N \times N$ 矩阵：

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} -(a_{\frac{1}{2}} + a_{\frac{3}{2}}) & a_{\frac{3}{2}} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{\frac{3}{2}} & -(a_{\frac{3}{2}} + a_{\frac{5}{2}}) & a_{\frac{5}{2}} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-\frac{3}{2}} & -(a_{N-\frac{3}{2}} + a_{N-\frac{1}{2}}) & a_{N-\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{N-\frac{1}{2}} & -(a_{N-\frac{1}{2}} + a_{N+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix},$$

而 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_N)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{f}=h^2(f_1,f_2,\cdots,f_N)^{\mathrm{T}}$ 是 N 维列向量.

尽管 $\boldsymbol{L}$ 是带宽(稀疏)矩阵，但其条件数很大. 这是因为，如果(9.63)式中 $a(t)=1$，那么 $\boldsymbol{L}$ 就是二阶微分算子 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$ 的中心差分矩阵表示，其条件数为 $O(N^2)$. 另一方面，当 $a(t)$ 在区间(0,1)上不是常值函数时，还要考虑再乘以 $a(t)$ 的运算，这个乘法算子的条件数可以任意大. 这就意味着直接求解线性方程组(9.65)是非常困难的. 注意到，问题(9.63)的逆算子 $\boldsymbol{L}^{-1}$ 的核函数满足条件(9.61)和(9.62)，所以即使对于较小的 N 算子 $\boldsymbol{L}^{-1}$ 在通常的表示下是稠密的但在小波系下有稀疏表示，这启发我们可以考虑由 $\boldsymbol{L}$ 出发在小波系下构造 $\boldsymbol{L}^{-1}$. 我们的目标是，仅用 $O(-\log_\varepsilon N)$ 运算来计算矩阵 $\boldsymbol{L}^{-1}$，其中 ε 是指定的精度.

9.3.3 周期化和预处理

下面首先将原问题(9.63)化为周期问题，也就是把(9.65)的系数矩阵 $\boldsymbol{L}$ 转化为循环矩阵的形式. 这是因为周期化微分算子在小波基下的预乘子是对角矩阵. 这种把小波与预乘子相结合的方法的优越性主要体现在：一方面，小波可以提供一个有效的坐标系(即基函数系)，使得原本条件数很大的系数矩阵在该坐标系下可以通过一个对角预乘子控制条件数至 $O(1)$ 大小；另一方面，可以明显改善惯常使用的有限差分格式的性能.

为了利用周期微分算子的优良性质，我们把矩阵 $\boldsymbol{L}$ 化为一个循环矩阵和两个扰动矩阵之和的形式：

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{A}-a_{\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_N^{\mathrm{T}}-a_{N+\frac{1}{2}}\boldsymbol{e}_N\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}},\tag{9.66}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-(a_{\frac{1}{2}}+a_{\frac{3}{2}}) & a_{\frac{3}{2}} & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{\frac{1}{2}}\\ a_{\frac{3}{2}} & -(a_{\frac{3}{2}}+a_{\frac{5}{2}}) & a_{\frac{5}{2}} & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-\frac{3}{2}} & -(a_{N-\frac{3}{2}}+a_{N-\frac{1}{2}}) & a_{N-\frac{1}{2}}\\ a_{N+\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{N-\frac{1}{2}} & -(a_{N-\frac{1}{2}}+a_{N+\frac{1}{2}})\end{pmatrix},$$

而 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_N=(0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$ 是 N 维单位向量.

假设 $a(t)$ 在(0,1)上变化不剧烈，为了说明在小波坐标系下对角化预处理的作用，不妨令 $a(t)=1$，此时算子 L 为二阶微分算子，即 $L=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$，而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}$，其中

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

是 $N\times N$ 矩阵，而 $N=2^J$. 这里，考虑将 $\boldsymbol{D}$ 在小波系下用标准格式表示为矩阵 $\boldsymbol{D}_\omega$. 取对角预乘子 $\boldsymbol{P}=(p_{il})$ 作预处理，记为

$$\boldsymbol{D}_\omega^P = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}_\omega\boldsymbol{P},$$

其中 $p_{il}=2^j\delta_{il}$, $1\leqslant j\leqslant J$, $N-\frac{N}{2^{j-1}}+1\leqslant i$, $l\leqslant N-\frac{N}{2^j}$, 而 $p_{NN}=2^J$.

图 9-6 给出了 $J=5$ 时二阶微分算子在小波系下的矩阵的对角预乘子.

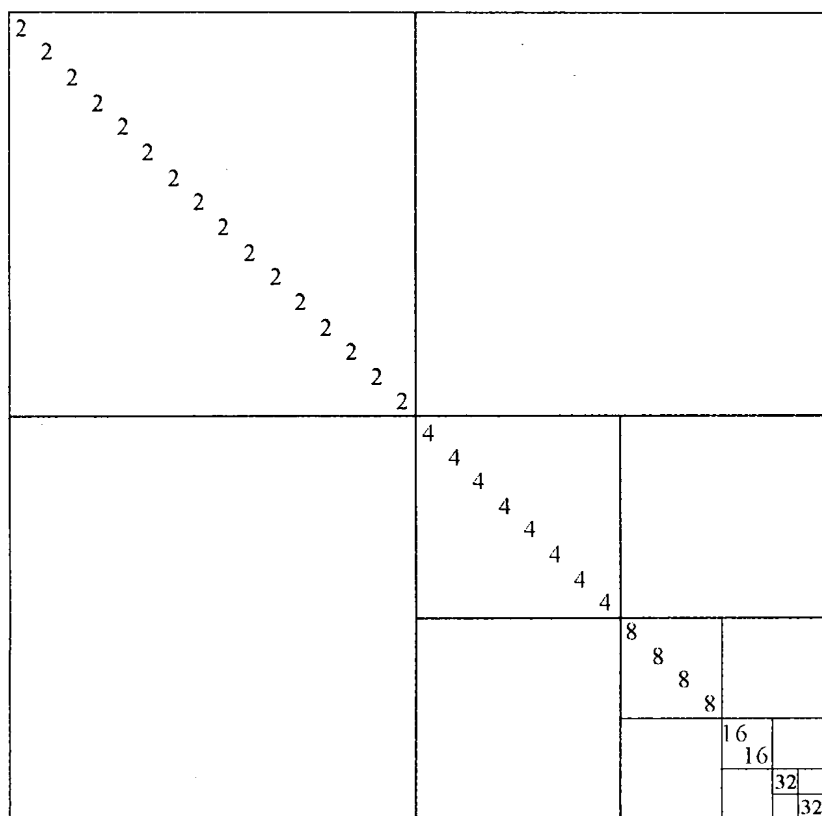


图 9-6　二阶微分算子在小波系下的矩阵的对角预乘子($J=5$)

表 9-3 列出了矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的条件数 κ 和 $\boldsymbol{D}_\omega^P$ 的条件数 κ_p.

由表 9-3 容易看出，小波结合对角预乘子的方法可有效地改善原系统的病态(条件数很大)特征，使得系统求解变得简单可行，且小波的消失矩阶数越高，变换后系统的性质越好(条件数越小).

表 9-3 **二阶周期化微分算子在 N 阶消失矩的 Daubechies 小波系下对应的系数矩阵的条件数**

N	κ	$\kappa_p(N=3)$	$\kappa_p(N=6)$
32	0.10409×10^3	8.021	5.2002
64	0.41535×10^3	9.086	5.2610
128	0.16605×10^4	10.019	5.2897
256	0.66405×10^4	10.841	5.3035
512	0.26562×10^5	11.562	5.3103
1024	0.10625×10^6	12.197	5.3137

现在我们来讨论如何在小波系下求解两点边值问题. 记离散小波变换的矩阵为 $\boldsymbol{W}$，并设 $\boldsymbol{W}$ 是正交矩阵(选取正交小波就保证了这一点). 在小波系下(9.65)和(9.66)式可以改写为

$$(\boldsymbol{A}_w - a_{\frac{1}{2}}\hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{e}}_N^{\mathrm{T}} - a_{N+\frac{1}{2}}\hat{\boldsymbol{e}}_N\hat{\boldsymbol{e}}_1^{\mathrm{T}})\hat{\boldsymbol{u}} = \hat{\boldsymbol{f}}, \tag{9.67}$$

其中 $\boldsymbol{A}_w = \boldsymbol{WAW}^{\mathrm{T}}$, $\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{Wu}$, $\hat{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{Wf}$, $\hat{\boldsymbol{e}}_1 = \boldsymbol{We}_1$ 及 $\hat{\boldsymbol{e}}_N = \boldsymbol{We}_N$.

通过计算一个 $N=2^J$ 维向量的离散(周期化)小波变换，我们在尺度 J 上得到两个系数：一是表示元素间的差异的高频系数，一是表示总体均值的低频系数. 注意到向量的总体均值与该向量各元素之和成比例，而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行的元素之和为 0，因此 $\boldsymbol{A}_w$ 具有以下结构：

$$\boldsymbol{A}_w = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & 0 \\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 是一个 $(N-1)\times(N-1)$ 满秩矩阵，其条件数正比于 N^2. 下面考虑如何确定向量 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$. 如果在求 $\boldsymbol{A}_w$ 时首先对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各列作小波变换，那么变换矩阵的最后一行为

$$\rho(a_{N+\frac{1}{2}} - a_{\frac{1}{2}})(\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{e}_N^{\mathrm{T}}),$$

其中参数 ρ 依赖于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数 N. 为了得到矩阵 $\boldsymbol{A}_w$，还要进一步对中间结果(矩阵)的各行再作小波变换，最后可得

$$(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}, 0) = \rho(a_{N+\frac{1}{2}} - a_{\frac{1}{2}})(\hat{\boldsymbol{e}}_1^{\mathrm{T}} - \hat{\boldsymbol{e}}_N^{\mathrm{T}}).$$

引入记号 $\hat{\boldsymbol{e}}_l = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_l \\ \rho \end{pmatrix}$，$l = 1, N$，其中 $\boldsymbol{r}_l$ 是 $N-1$ 维向量，ρ 是尺度因子；$\hat{\boldsymbol{u}}_l = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d} \\ s \end{pmatrix}$，$\hat{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}^d \\ f^s \end{pmatrix}$；又令

$$2a = a_{\frac{1}{2}} + a_{N+\frac{1}{2}}, \quad \alpha = \frac{a_{\frac{1}{2}}}{2a}, \quad \beta = \frac{a_{N+\frac{1}{2}}}{2a},$$

则(9.67)式可以改写为

$$\left[\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} - 2a \begin{pmatrix} \alpha \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_N^{\mathrm{T}} + \beta \boldsymbol{r}_N \boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} & \rho(\alpha \boldsymbol{r}_1 + \beta \boldsymbol{r}_N) \\ \rho(\alpha \boldsymbol{r}_N^{\mathrm{T}} + \beta \boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}) & \rho^2 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \boldsymbol{d} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}^d \\ f^s \end{pmatrix}, \tag{9.68}$$

其中 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = 2a\rho(\beta - \alpha)(\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{r}_N^{\mathrm{T}})$. 将

$$s = -\frac{(\alpha \boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} + \beta \boldsymbol{r}_N^{\mathrm{T}})\boldsymbol{d}}{\rho} - \frac{f^s}{2a\rho^2}$$

代入(9.68)式得到关于 $\boldsymbol{d}$ 的 $N-1$ 元线性方程组：

$$[\boldsymbol{B} + 2a(\alpha^2 \boldsymbol{r}_1 - \beta^2 \boldsymbol{r}_N)(\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{r}_N^{\mathrm{T}})]\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f}^d - \frac{f^s}{\rho}(\alpha \boldsymbol{r}_1 + \beta \boldsymbol{r}_N). \tag{9.69}$$

利用小波求解两点边值问题(9.63)的主要依据就是这里的矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 是稀疏的，只需要 $O(N)$ 运算就可以得到. 下面先假设已给定矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}$，根据 Sherman-Morrison 公式，由(9.69)式得

$$d = [\boldsymbol{B}^{-1} - \sigma \boldsymbol{B}^{-1}(\alpha^2 \boldsymbol{r}_1 - \beta^2 \boldsymbol{r}_N)(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_N)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}^{-1}]\left[\boldsymbol{f}^d - \frac{f^s}{\rho}(\alpha \boldsymbol{r}_1 + \beta \boldsymbol{r}_N)\right], \tag{9.70}$$

其中

$$\sigma = \frac{2a}{1 + 2a(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_N)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}^{-1}(a^2 \boldsymbol{r}_1 - \beta^2 \boldsymbol{r}_N)}.$$

进一步，若将逆算子 $\boldsymbol{L}^{-1}$ 分块为

$$\boldsymbol{L}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} & \gamma \end{pmatrix}, \tag{9.71}$$

可以得到

$$\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{B}^{-1} - \sigma \boldsymbol{B}^{-1}(\alpha^2 \boldsymbol{r}_1 - \beta^2 \boldsymbol{r}_N)(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_N)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}^{-1}, \tag{9.72}$$

$$\boldsymbol{p} = -\frac{1}{\rho}[\boldsymbol{B}^{-1}(\alpha \boldsymbol{r}_1 + \beta \boldsymbol{r}_N) - \sigma \kappa_1 \boldsymbol{B}^{-1}(\alpha^2 \boldsymbol{r}_1 - \beta^2 \boldsymbol{r}_N)], \tag{9.73}$$

$$\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} = -\frac{1}{\rho}[(\alpha \boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} + \beta \boldsymbol{r}_N^{\mathrm{T}})\boldsymbol{B}^{-1} - \sigma \kappa_2 (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_N)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}^{-1}], \tag{9.74}$$

$$\gamma = \frac{1}{\rho_2}\left(\kappa_3 - \sigma \kappa_1 \kappa_2 - \frac{1}{2a}\right), \tag{9.75}$$

其中

$$\begin{cases}\kappa_1 = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_N)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}(\alpha\boldsymbol{r}_1 + \beta\boldsymbol{r}_N),\\ \kappa_2 = (\alpha\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} + \beta\boldsymbol{r}_N^{\mathrm{T}})\boldsymbol{B}^{-1}(\alpha^2\boldsymbol{r}_1 - \beta^2\boldsymbol{r}_N),\\ \kappa_3 = (\alpha\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}} + \beta\boldsymbol{r}_N^{\mathrm{T}})\boldsymbol{B}^{-1}(\alpha\boldsymbol{r}_1 + \beta\boldsymbol{r}_N).\end{cases} \tag{9.76}$$

注意到(9.72) ~ (9.76) 式中所有的矩阵和向量的乘法都涉及稀疏矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 和稀疏向量 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_N$，因此构造逆算子 $\boldsymbol{L}^{-1}$ 的问题就转化为计算逆矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 的问题.

9.3.4 计算周期算子的逆

现在，我们来计算周期算子 $\boldsymbol{B}$ 的逆算子 $\boldsymbol{B}^{-1}$，可大致分为 3 个步骤.

(1) 对 $(N-1)\times(N-1)$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 作如下变换：

$$\boldsymbol{B}_p = \boldsymbol{PBP},$$

其中 $\boldsymbol{P} = (p_{il})$ 为对角矩阵，即

$$p_{il} = 2^j\delta_{il}, \quad 1 \leqslant j \leqslant J,\ N - \frac{N}{2^{j-1}} + 1 \leqslant i, l \leqslant N - \frac{N}{2^j}.$$

这样 $\boldsymbol{B}_p$ 的条件数为 $O(1)$. 矩阵 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}_p$ 均为满秩稀疏阵.

(2) 计算逆矩阵 $\boldsymbol{B}_p^{-1}$. 采用以下迭代算法：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_0 &= \alpha\boldsymbol{B}_p^*, \text{（初始化）}\\ \boldsymbol{X}_{l+1} &= 2\boldsymbol{X}_l - \boldsymbol{X}_l\boldsymbol{B}_p\boldsymbol{B}_l,\end{aligned} \tag{9.77}$$

其中 $0 < \alpha < \dfrac{2}{\sigma_1}$，而 σ_1 是 $\boldsymbol{B}_p$ 的最大奇异值.

对于满秩矩阵 $\boldsymbol{B}_p$，迭代算法(9.77) 收敛到 $\boldsymbol{B}_p^{-1}$，迭代次数与 $\boldsymbol{B}_p$ 的条件数的对数成比例，也即 $O(1)$.

如果矩阵 $\boldsymbol{B}_p, \boldsymbol{B}_p^{-1}$ 和所有中间矩阵 $\boldsymbol{X}_l$ 在小波基下均有稀疏表示，那么用迭代公式(9.77) 计算逆矩阵需要 $O(N)$ 运算量. 因为我们事先知道 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 在小波基下的表示是稀疏的(满足给定精度要求)，所以只需要保证迭代过程的所有中间矩阵 $\boldsymbol{X}_l$ 的稀疏性. 在算法(9.77) 的执行过程中，对每次迭代的结果把所有绝对值小于给定阈值(例如 10^{-2}) 的元素置0来计算低精度的近似逆矩阵，随着迭代次数的增加逐步减小阈值来提高近似解的精度.

(3) 计算矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}$. 在按给定精度要求求得 $\boldsymbol{B}_p^{-1}$ 以后，就可按以下公式计算 $\boldsymbol{B}^{-1}$：

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_p^{-1}\boldsymbol{P}. \tag{9.78}$$

由于 $\boldsymbol{P}$ 是对角矩阵，所以在计算 $\boldsymbol{B}_p = \boldsymbol{PBP}$ 和(9.78) 式的过程中只有乘法运算，无精度损失. 特别地，这里仅用 2 的方幂作乘法运算，所以未引入舍

入误差.

至此，再回到(9.71)～(9.76)式进行相关计算即可完成椭圆微分算子$\boldsymbol{L}$的逆$\boldsymbol{L}^{-1}$的构造.

9.3.5 问题的进一步扩展

我们在前面的论述中一直假设函数$a(t)$在区间(0,1)上变化不大，事实上当$a(t)$存在变化时上述方法同样有效.

如果$a(t)$是使得有限差分格式(9.64)适用于求解两点边值问题的函数，那么在(9.64)两边同时乘以对角矩阵

$$\boldsymbol{P}_a = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{a_N}}\right),$$

就得到相应于算子$\frac{1}{a(t)}\frac{\partial}{\partial t}\left(a(t)\frac{\partial u}{\partial t}\right)$的差分格式

$$\frac{a_{i-\frac{1}{2}}}{\sqrt{a_{i-1}a_i}}v_{i-1} - \frac{a_{i-\frac{1}{2}} + a_{a+\frac{1}{2}}}{a_i}v_i + \frac{a_{i+\frac{1}{2}}}{\sqrt{a_i a_{i+1}}}v_{i+1} = h^2\frac{f_i}{\sqrt{a_i}},$$
$$i = 1,2,\cdots,N, \tag{9.79}$$

其中$v_i = u_i\sqrt{a_i}$, $i = 1,2,\cdots,N$.

如果$a(t)$足够光滑，那么就有

$$\frac{a\left(t-\frac{h}{2}\right)}{\sqrt{a(t-h)a(t)}} = 1 + O(h^2),$$

$$\frac{a\left(t-\frac{h}{2}\right) + a\left(t+\frac{h}{2}\right)}{a(t)} = 2 + O(h^2),$$

以及

$$\frac{a\left(t+\frac{h}{2}\right)}{\sqrt{a(t)a(t+h)}} = 1 + O(h^2).$$

于是，对应于(9.79)式的矩阵$\boldsymbol{L}$就可以写为$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_0 + h^2\boldsymbol{R}$，其中

$$\boldsymbol{L}_0 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

若给定算子$\boldsymbol{L}_0^{-1}$，则

$$L^{-1} = L_0^{-1}(I + h^2 L_0^{-1} R)^{-1}.$$

因此只需计算$(I+h^2L_0^{-1}R)^{-1}$. 如果算子$T=-h^2L_0^{-1}R$的最大奇异值小于1，并注意到

$$(I-T)^{-1} = \prod_{j=0}^{+\infty}(I+T^{2^j}),$$

那么利用迭代算法(9.77)求逆算子L^{-1}就特别简单.

9.4 约束预处理共轭梯度算法

偏微分方程理论的研究具有悠久的历史. 直到20世纪50年代，由于广义函数理论的建立，人们逐步习惯于用这样一个观点来看待微分方程，即认为它是由一个微分算子所导出的映射. 于是，一个微分方程的求解就可以视为相应的微分算子在一定意义上的求逆.

我们在上一节用一个最简单的例子，描述了求椭圆微分算子的逆算子的基本思路. 现在我们从一般椭圆边值问题出发，介绍求解椭圆微分算子的逆算子的约束预处理共轭梯度法.

9.4.1 问题的描述

考虑椭圆微分方程边值问题

$$Lu = f, \quad \boldsymbol{x} \in D \subset \mathbf{R}^d, \tag{9.80}$$

$$Bu|_{\partial D} = g, \tag{9.81}$$

这里，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_d)$是$\mathbf{R}^d$中的变量，$L$是椭圆微分算子

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{d}(a_{ij}(\boldsymbol{x})u_{x_i})_{x_j} + b(\boldsymbol{x})u, \tag{9.82}$$

B是边界算子

$$Bu = \alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial N}. \tag{9.83}$$

我们假设区域D的边界∂D形状很复杂.

从理论上说，求解问题(9.80)和(9.81)的经典方法大致有3个步骤：

(1) 将函数f光滑地延拓到包含D的超矩形箱区域B上($D\subset B\subset\mathbf{R}^d$)，得到$f_{\text{ext}}$: $\boldsymbol{x}\in B$，且$f_{\text{ext}}=f$，$\boldsymbol{x}\in D$；

(2) 求解带有周期边界条件的问题

$$Lu = f_{\text{ext}}, \quad \boldsymbol{x} \in B, \tag{9.84}$$

得到解 u_{ext}；

(3) 令(9.80)式的解具有形式 $u = u_{\text{ext}} + v$，其中 v 是下述问题的解：

$$Lv = 0, \quad \boldsymbol{x} \in D,$$
$$Bv|_{\partial D} = g - Bu_{\text{ext}}|_{\partial D}.$$

这里着重考虑步骤(2)的实现，即求解问题(9.84). 我们的目标是建立一种自适应算法，其运算次数与 f_{ext} 的离散表示式中非零元素的个数成比例. 现有的数值方法是先将区域 B 作适当的网格剖分，再把方程(9.84)离散化，然后将问题化为线性方程组求其数值解. 由于离散化后的方程必须能够反映函数 f 在其奇异点以及光滑区域的特征，所以当 f 不够规则时就需要选取很多的网格点或单元，进而导致离散后的线性方程组复杂难解. 目前普遍采用的自适应算法(例如自适应网格或不规则单元法)在求解这类问题时，需要综合考虑算法设计和程序实现，特别是当维数较高时运算相当烦琐. 下面我们考虑用小波基来表示函数，利用小波优越的时频局部分析能力得到一种较为简便的自适应算法.

9.4.2 精度子空间

为了方便起见，考虑带有周期边界条件的 **Poisson 方程**

$$\Delta u = f, \quad \boldsymbol{x} \in B. \tag{9.85}$$

设 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(\mathbf{R}^d)$ 的一个多分辨率分析(MRA)：

$$\cdots \subset V_{j+1} \subset V_j \subset V_{j-1} \subset \cdots,$$

其中 V_j 是由标准正交系 $\{\varphi_{j,\boldsymbol{k}}(x),\ \boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^d\}$ 张成的子空间，即

$$V_j = \overline{\text{span}}\{\varphi_{j,\boldsymbol{k}}(x),\ \boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^d,\ \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^d\}, \quad j \in \mathbf{Z},$$

其中 $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \cdots, k_d)$ 是多重指标，而

$$\varphi_{j,\boldsymbol{k}}(x) = 2^{-\frac{jd}{2}} \prod_{l=1}^{d} \varphi(2^{-j}x_l - k_l),$$

这里的 φ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个 OMRA 的生成元或尺度函数.

进一步，设 W_j 是 V_j 在 V_{j-1} 中的正交补，即

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j, \quad V_j \perp W_j.$$

若考虑最粗尺度为 $j = J$，则有

$$L^2(\mathbf{R}^d) = V_J \bigoplus_{j\leqslant J} W_j.$$

为了确定 W_j 的标准正交基，我们定义

$$\varphi^\rho(x) = \begin{cases} \psi(x), & \rho = 1, \\ \varphi(x), & \rho = 0, \end{cases}$$

其中 ψ 是与尺度函数 φ 对应的小波，且具有消失矩. 令

$$\psi_{j,k}^{\sigma}(x) = 2^{-\frac{jd}{2}}\prod_{l=1}^{d}\varphi^{\rho_l}(2^{-j}x_l - k_l),$$

其中多重指标 $\sigma = (\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_d) \neq 0$，而 $\rho_l = 1$ 或 0，$l = 1, 2, \cdots, d$. 则

$$W_j = \overline{\text{span}}\{\psi_{j,k}^{\sigma}(x),\ \boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^d,\ \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^d\},\quad j \in \mathbf{Z}.$$

这样就可以将函数 $f(\boldsymbol{x})$ 和(9.85)的解 $u(\boldsymbol{x})$ 在小波基下表示为

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j\leqslant J}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\sigma} f_{j,\boldsymbol{k}}^{\sigma}\psi_{j,\boldsymbol{k}}^{\sigma}(\boldsymbol{x}) + \sum_{\boldsymbol{k}} s_{J,\boldsymbol{k}}^{f}\varphi_{J,\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}), \tag{9.86}$$

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{j\leqslant J}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\sigma} u_{j,\boldsymbol{k}}^{\sigma}\psi_{j,\boldsymbol{k}}^{\sigma}(\boldsymbol{x}) + \sum_{\boldsymbol{k}} s_{J,\boldsymbol{k}}^{u}\varphi_{J,\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}), \tag{9.87}$$

其中

$$f_{j,\boldsymbol{k}}^{\sigma} = \langle f, \psi_{j,\boldsymbol{k}}^{\sigma}\rangle,\quad u_{j,\boldsymbol{k}}^{\sigma} = \langle u, \psi_{j,\boldsymbol{k}}^{\sigma}\rangle,$$

$$s_{J,\boldsymbol{k}}^{f} = \langle f, \varphi_{J,\boldsymbol{k}}\rangle,\quad s_{J,\boldsymbol{k}}^{u} = \langle u, \varphi_{J,\boldsymbol{k}}\rangle.$$

在实际计算中，由于小波具有优良的压缩性能，所以只需在分解式(9.86)和(9.87)中截取有限几项就能得到很好的近似. 为了刻画逼近的精度，定义函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的 ε 精度子空间为

$$M_f^{\varepsilon} = V_J \cup \overline{\text{span}}\{\psi_{j,\boldsymbol{k}}^{\sigma} \mid (j, \boldsymbol{k}, \sigma):\ |f_{j,\boldsymbol{k}}^{\sigma}| > \varepsilon\},$$

解 $u(\boldsymbol{x})$ 的 ε 精度子空间为

$$M_u^{\varepsilon} = V_J \cup \overline{\text{span}}\{\psi_{j,\boldsymbol{k}}^{\sigma} \mid (j, \boldsymbol{k}, \sigma):\ |u_{j,\boldsymbol{k}}^{\sigma}| > \varepsilon\}.$$

于是，可以由 M_f^{ε} 估计 M_u^{ε}，并且有以下结论：

定理 9.4 设 $u(\boldsymbol{x}) = \sum_{j\leqslant J}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\sigma} u_{j,\boldsymbol{k}}^{\sigma}\psi_{j,\boldsymbol{k}}^{\sigma}(\boldsymbol{x}) + c$（$c$ 为常数）是带有周期边界条件的 **Poisson** 问题

$$\Delta u = \psi_{j',\boldsymbol{k}'}^{\sigma'}(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x} \in B$$

的解，那么 $\forall \varepsilon > 0$，必存在 $\lambda > 0$，$\mu > 0$，使得这个解中满足 $|u_{j,\boldsymbol{k}}^{\sigma}| > \varepsilon$ 的所有非零系数的指标 $(j, \boldsymbol{k}, \sigma)$ 均有 $|\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'| \leqslant \lambda$ 且 $|j - j'| \leqslant \mu$，其中 λ 和 μ 的大小不仅依赖于 ε 而且也依赖于小波基的选取.

根据定理 9.4，对于给定的 M_f^{ε}，可以构造一个集合 $M_{\lambda,\mu}$（称为 M_f^{ε} 的一个 (λ, μ) 一邻域），使得 $M_u^{\varepsilon} \subset M_{\lambda,\mu}$. 可见，子空间 M_u^{ε} 的估计就相当于构造一个网罩，把我们感兴趣的非零系数的指标都包含在这个网罩内.

若直接根据 M_f^{ε} 来估计 $M_{\lambda,\mu}$ 则是很麻烦的，我们可以使用迭代方法. 例如，首先直接在子空间 M_f^{ε} 上求解，得到近似解 $\tilde{u}$，估计 $\tilde{u}$ 的精度 $\tilde{\varepsilon}$（通常 $\tilde{\varepsilon} > \varepsilon$）. 然后求 $\tilde{u}$ 的 Laplace 变换得到 $\tilde{f}$，估计 $\tilde{f}$ 的 ε 精度子空间. 再在这个子空间

上重复刚才的操作，以提高解的精度. 换言之，通过反复迭代就可以构成M_u^ε的网罩.

一般说来，以上迭代过程只需少数几步就可以达到指定精度要求，也即得到需要的$M_{\lambda,\mu}$. 事实上，确定了$M_{\lambda,\mu}$也就知道了空间作多尺度分解的层数，在此基础上就可以将原问题在小波基下化为求解线性方程组的问题. 正如上一节所述，该方程组系数矩阵的条件数通常很大，导致矩阵求逆过程出现数值不稳定，需要先对系数矩阵进行预处理，再选择适当的方法求解. 下面就来讨论这一过程.

9.4.3 自适应算法

一般说来，算子在小波基下的矩阵具有很大的条件数. 为了改善这种状况，提高运算速度和数值稳定性，我们先引进一个简单算子对这个矩阵进行预处理. 然后采用共轭梯度法(CG)并限制在子空间$M_{\lambda,\mu}$上迭代求解. 所以，我们称这种自适应算法为约束预处理共轭梯度算法(CPCG).

考虑周期算子Δ在子空间V_0上的投影L_0，即

$$L_0 = P_0 \Delta P_0,$$

其中P_0是由(3.42)式定义的V_0上的逼近算子.

又设$\boldsymbol{L}_{ns}$是周期算子Δ在小波基下用非标准格式表示的矩阵，则方程(9.85)可化为

$$\boldsymbol{L}_{ns}\boldsymbol{u}_w = \boldsymbol{f}_w, \tag{9.88}$$

其中$\boldsymbol{u}_w$和$\boldsymbol{f}_w$是函数u和f在相应小波系下的离散向量表示. 这里的$\boldsymbol{L}_{ns}$是稀疏的带宽矩阵但是条件数通常非常大.

我们知道，对于周期微分算子在小波系下用非标准格式表示的矩阵$\boldsymbol{L}_{ns}$，总存在简单的具$O(1)$条件数的对角预乘子$\boldsymbol{P}$. 例如对于二阶微分算子，可取$\boldsymbol{P} = (p_{il})_{N\times N}$，其中

$$p_{il} = 2^j \delta_{il}, \quad 1 \leqslant j \leqslant J, \quad p_{NN} = 2^J,$$

且$N - \dfrac{N}{2^{j-1}} + 1 \leqslant i, l \leqslant N - \dfrac{N}{2^j}$, $N = 2^J$. 这里我们采用这种预乘子. 至于如何构造更一般算子在小波基下的简单预乘子，我们将在下一段详细讨论.

设$\boldsymbol{P}$是$\boldsymbol{L}_{ns}$的一个对角预乘子，并记$\boldsymbol{u}_w = \boldsymbol{P}\boldsymbol{v}$，那么(9.88)式可以改写为

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}_{ns}\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{f}_w. \tag{9.89}$$

与直接求解(9.88)式相比，方程(9.89)的求解要简便得多，这是因为$\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}_{ns}\boldsymbol{P}$的条件数为$O(1)$，远远小于$\boldsymbol{L}_{ns}$的条件数.

为了求解(9.89)，我们采用共轭梯度法，并且限制在子空间$M_{\lambda,\mu}$上进

行. 如果没有这样的限制，那么就会成为迭代过程的前期在共轭方向十分稠密而后期在子空间 $M_{\lambda,\mu}$ 之外比较稀疏. 于是，把求解限制在一个子空间上进行在自适应算法中是相当重要的. 另外，由于经过了算子的预处理，共轭梯度法只需少数次的迭代即收敛.

在小波坐标系下应用共轭梯度法，只是在共轭方向产生了有意义的非零元素，这些元素位于子空间 $M_{\lambda,\mu}$ 内. 对于这种算法，每次迭代的运算量与 $M_{\lambda,\mu}$ 中元素的个数成比例，迭代次数是 $O(1)$ 的. 于是，整个运算次数与 f 的重要系数即 M_f^ε 的维数成比例.

9.4.4 算子的预处理

预乘子的引入在自适应算法中是至关重要的，一般要权衡收敛速度和数值稳定性是否提高，经过预处理后每一步迭代的代价(cost)是否减少等. 现在，我们考虑如何构造算子

$$L=-\Delta+C. \tag{9.90}$$

在小波基下的对角预乘子，其中 Δ 是 Laplace 算子，$C>0$ 是常算子. 注意到如果算子 A 和 B 用小波基表示时均为对角矩阵，对角元为 a_i 和 b_i，且 $a_i+b_i\neq 0$，那么以 $\dfrac{1}{a_i+b_i}$ 为对角元的对角算子是一个理想的对角预乘子.

我们已经知道，尽管 Δ 并非对角算子，但存在一个很好的对角预乘子，因此可取这个预乘子代替 $-\Delta$ 来构造算子(9.90)的预乘子. 注意到恒等算子 I 的小波基表示是单位矩阵，所以把算子 $C\cdot I$ 限制在子空间

$$\bigoplus_{1\leqslant j\leqslant J}\boldsymbol{W}_j$$

上，在这个子空间上构造算子(9.90)的预乘子 $\boldsymbol{P}=(p_{il})_{N\times N}$，得到

$$p_{il}=\frac{\delta_{il}}{\sqrt{2^{-2j}+C}}, \tag{9.91}$$

其中 $1\leqslant j\leqslant J$，$N=2^J$，且 $N-\dfrac{N}{2^{j-1}}+1\leqslant i,l\leqslant N-\dfrac{N}{2^j}$，而

$$p_{NN}=\frac{1}{\sqrt{2^{-2J}+C}}.$$

数值实验表明，形如(9.91)式的预乘子是非常有效的. 表 9-4 列出的是算子 $-\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+C$ 在小波基下表示为一个 256×256 矩阵后用(9.91)式中的预乘子作用前后的条件数.

表 9-4 $-\frac{d^2}{dt^2}+C$ 在消失矩阶数为 6 的 Daubechies 小波系下对应的算子矩阵的条件数 κ 以及用对角预乘子作用后的条件数 κ_p

C	7.1×10^{0}	7.1×10^{-1}	7.1×10^{-2}	7.1×10^{-3}	7.1×10^{-4}	7.1×10^{-5}
κ	2.4×10^{0}	1.5×10^{1}	1.4×10^{2}	1.3×10^{3}	6.7×10^{3}	1.5×10^{4}
κ_p	2.1	6.3	9.4	9.5	7.5	5.0

如果考虑算子 $L=-\Delta+V$，其中 V 是乘以函数 $V(x)$ 的乘法算子，那么可在较细尺度上得到类似的构造. 具体地说，选取较细尺度 j，使得 $V(x)$ 在小波 $\psi_{j,k}^{\sigma}$ 的支撑域 Ω 上变化不大，考虑由

$$(V^{\text{diag}}\psi_{j,k}^{\sigma})=V(x_{j,k})\psi_{j,k}^{\sigma}$$

确定的对角算子 V^{diag}，其中 $x_{j,k}\in\Omega$. 这时就可用对角算子 V^{diag} 来代替 V，用上述方法构造算子 $\widetilde{L}=-\Delta+V^{\text{diag}}$ 的预乘子来作为 $L=-\Delta+V$ 的预乘子.

大多数迭代法所产生的代数误差都呈指数衰减，且衰减速度受到相应于这个算子的矩阵的条件数 κ 的控制. 例如共轭梯度法，对于系数矩阵为对称正定矩阵的 N 元线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{b},$$

其精确解 $\boldsymbol{u}$ 与第 m 次迭代的近似解 $\boldsymbol{u}^m$ 之间的误差为

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^m\|_A\leqslant 2\left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^m\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^0\|_A,$$

其中 $\boldsymbol{u}^0$ 是迭代初值，$\|\boldsymbol{x}\|_A=\sqrt{\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\rangle}$. 我们注意到，对称矩阵的条件数 κ 就等于其最大特征值与最小特征值之比的绝对值，因此为了改善收敛性，可以通过求解一个与之等价的线性方程组

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{b}$$

来减小条件数 κ，这里 $\boldsymbol{P}$ 必须满足两个条件：

(1) $\kappa(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})\ll\kappa(\boldsymbol{A})$；

(2) $\boldsymbol{P}$ 与任一向量相乘的运算必须很简单.

例如，二阶微分算子在小波基下的矩阵几乎是对角的，我们很容易给这个算子构造对角预乘子 $\boldsymbol{P}=(p_{il})_{N\times N}$ 如下：

$$p_{il}=2^j\delta_{il},\ 1\leqslant j\leqslant J,\quad p_{NN}=2^J,$$

其中 $N-\frac{N}{2^{j-1}}+1\leqslant i,l\leqslant N-\frac{N}{2^j}$，$N=2^J$.

习 题 9

1. 证明：Sturm-Liouville 边值问题(9.1) 的解可由公式(9.2) 表示.
2. 详细推导积分算子(9.10) 的 J 尺度小波逼近的矩阵形式(9.27).
3. 设 r_k 由(9.36) 式定义，证明：$\sum_{k\in\mathbf{Z}} kr_k = -1$.
4. 推导(9.43) 式.
5. 证明定理 9.2.
6. 设 $\varphi(t) \in L^2(\mathbf{R})$ 是尺度函数，令

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\varphi(t-y)\mathrm{d}t,$$

证明：$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(y)\mathrm{d}y = 1$.

7. 利用二阶中心差分将带有 Dirichlet 边界条件的两点边值问题

$$\begin{cases} -u''(t) + au(t) = f(t), & t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

离散化，其中 a 是正常数.

(1) 取步长 $h = \frac{1}{N}$，写出离散化线性方程组 $\boldsymbol{Lu} = \boldsymbol{f}$；

(2) 计算上述线性方程组系数矩阵 $\boldsymbol{L}$ 的条件数；

(3) 给出形如(9.66) 的分解式，并计算其中的矩阵 $\boldsymbol{A}$.

8. 已知 $\boldsymbol{A}_n = (a_{ij}^n)$ 是一个 $2^n \times 2^n$ 矩阵，其中

$$a_{ij}^n = \begin{cases} \dfrac{\log|i-2^{n-1}| - \log|j-2^{n-1}|}{i-j}, & i \neq j,\ i \neq 2^{n-1},\ j \neq 2^{n-1}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$i,j = 0,1,2,\cdots,2^n - 1.$$

(1) 利用 Daubechies 小波 D4 计算 $\boldsymbol{A}_9$ 的非标准格式与标准格式.

(2) 把上述结果中绝对值不超过 10^{-7} 的元素置为 0 而其他元素不变，再用图示方法分析小波对算子的压缩能力.

9. 考虑热传导方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \alpha \dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma u(x,t) = f(x,t), & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad (-\infty < x < +\infty), \end{cases}$$

其中 α,β,γ 是常数.

(1) 根据 BCR 算法建立数值求解格式，并估计逼近误差.

(2) 取 $\alpha=0$，$\beta=-1$，$\gamma=1$，函数 $f(x,t)$ 与 $u_0(x)$ 分别为

$$f(x,t)=\begin{cases}(x+10)(t+2), & x<0.5,\\ (x-10)(t+2), & x\geqslant 0.5,\end{cases} \quad t>0,$$

$$u_0(x)=\begin{cases}x+10, & x<0.5,\\ x-10, & x\geqslant 0.5,\end{cases}$$

求该方程的数值解.

(3) 对(2)中所求得的数值解，与方程的精确解

$$u(x,t)=\begin{cases}(x+10)(t+1), & x<0.5,\\ (x-10)(t+1), & x\geqslant 0.5,\end{cases} \quad t>0$$

进行误差分析并作图比较.

参考文献

[1] Abry P. and Aldroubi A. , "Designing Multiresolution Analysis-Type Wavelets and Their Fast Algorithms," *The Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2 (2), pp. 135-159, 1995

[2] Adams M. D. and Kossentini F. , "Reversible Integer-to-Integer Wavelet Transforms for Image Compression: Performance Evaluation and Analysis," *IEEE Trans. Image Processing*, 9 (6), pp. 1010-1024, 2000

[3] Aldroubi A. and Unser M. , "Families of Multiresolution and Wavelet Spaces with Optimal Properties," *Numerical Functional Analysis and Optimization*, Vol. 14, pp. 417-446, 1993

[4] Alpert B. and Rokhlin V. , "A Fast Algorithm for the Evaluation of Legendre Expansions," *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 12 (1), pp. 158-179, 1991

[5] Alpert B. , "A Class of Bases in L^2 for the Sparse Representation of Integral Operators," *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 24 (1), pp. 246-262, 1993

[6] Alpert B. , Beylkin G. , Gines D. and Vozovoi L. , "Adaptive Solution of Partial Differential Equations in Multiwavelet Bases," *Journal of Computational Physics*, 182 (1), pp. 149-190, 2002

[7] Antoine J. -P. , Murenzi R. and Vandergheynst P. , "Directional Wavelets Revisited: Cauchy Wavelets and Symmetry Detection in Patterns," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 6 (3), pp. 314-345, 1999

[8] Averbuch A. , Lazar D. and Israeli M. , "Image Compression Using Wavelet Transform and Multiresolution Decomposition," *IEEE Trans. Image Processing*, 5 (1), pp. 4-15, 1996

[9] Averbuch A. , Beylkin G. , Coifman R. R. and Israeli M. , "Multiscale Inversion of Elliptic Operators," *Signal and Image Representation in Combined Spaces* (Wavelet Analysis and Its Applications, Vol. 7, San Diego: Academic Press), pp. 1-16, 1998

[10] Bachman G. , Narici L. and Beckenstein E. , *Fourier and Wavelet Analysis*, New York: Springer Verlag, 2000

[11] Bacry E. , Mallat S. and Papanicolaou G. , "A Wavelet based Space-Time Adaptive

Numerical Method for Partial Differential Equation," *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 26 (7), pp. 793-834, 1992

[12] Bai Di, Fan Qibin, "An Image Fusion Algorithm Based on Lifting Scheme," *Geo-Spatial Information Science*, 8 (3), pp. 171-175, 2005

[13] Belogay E. and Wang Y., "Compactly Supported Orthogonal Symmetric Scaling Functions," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 7 (2), pp. 137-150, 1999

[14] Ben-Artzi A. and Ron A., "On the Integer Translates of a Compactly Supported Function: Dual Bases and Linear Projectors," *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 21 (6), pp. 1550-1562, 1990

[15] Berman Z. and Baras J. S., "Properties of the Multiscale Maxima and Zero-Crossings Representations," *IEEE Trans. Signal Processing*, 41 (12), pp. 3216-3231, 1993

[16] Beylkin G., Coifman R. and Rokhlin V., "Fast Wavelet Transforms and Numerical Algorithms Ⅰ," *Commun. Pure and Applied Mathematics*, 44 (2), pp. 141-183, 1991

[17] Beylkin G., "On the Representation of Operators in Bases of Compactly Supported Wavelets," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 29 (6), pp. 1716-1740, 1992

[18] Beylkin G., "Wavelets and Fast Numerical Algorithms," *Lecture Notes for Short Course*, American Mathematical Society, 1993; *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, Vol. 47, pp. 89-117, 1993

[19] Beylkin G., "On Wavelet-based Algorithms for Solving Differential Equations," *Wavelets: Mathematics and Applications*, Boca Raton: CRC Press, pp. 449-466, 1993

[20] Bi N., Dai X. and Sun Q., "Construction of Compactly Supported M-Band Wavelets," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 6 (2), pp. 113-131, 1999

[21] Boggess A. and Narcowich F. J., *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*, Prentice Hall, 2001 (中译本:《小波与傅里叶分析基础》, 芮国胜, 康健译, 北京: 电子工业出版社, 2004 年)

[22] Bruce A. G., Donoho D. L. and Gao H.-Y., "Wavelet Analysis," *IEEE Spectrum*, 33 (10), pp. 26-35, 1996

[23] Burt P. J. and Adelson E. H., "The Laplacian Pyramid as a Compact Image Code," *IEEE Trans. Communications*, 31 (4), pp. 532-540, 1983

[24] Calderbank A. R., Daubechies I., Sweldens W. and Yeo B.-L., "Wavelet Transforms that Map Integers to Integers," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 5 (3), pp. 332-369, 1998

[25] Carmona R., Hwang W.-L. and Torresani B., *Practical Time-Frequency Analy-*

sis: *Gabor and Wavelet Transforms with an Implementation in S* , San Diego: Academic Press, 1998

[26] Chambolle A. , DeVore R. A. , Lee N. and Lucier B. J. , "Nonlinear Wavelet Image Processing: Variational Problems, Compression, and Noise Removal Through Wavelet Shrinkage," *IEEE Trans. Image Processing*, 7 (3), pp. 319-335, 1998

[27] Chellappa R. *et al.* (Eds.), "The Past, Present, and Future of Image and Multidimensional Signal Processing," *IEEE Signal Processing Magazine*, 15 (2), pp. 21-58, 1998

[28] Chen D. , "Spline Wavelets of Small Support," *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 26 (2), pp. 500-517, 1995

[29] Chen H. L. , *Complex Harmonic Splines*, *Periodic Quasi-Wavelets*: *Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 2000

[30] Chen W. , Itoh S. and Shiki J. , "Irregular Sampling Theorems for Wavelet Subspaces," *IEEE Trans. Information Theory*, 44 (3), pp. 1131-1142, 1998

[31] Christensen O. , *An Introduction to Frames and Riesz Bases* (Applied and Numerical Harmonic Analysis), Boston: Birkhauser Verlag, 2003

[32] Chui C. K. and Lian J. A. , "A Study of Orthonormal Multiwavelets," *Applied Numerical Mathematics*, 20 (3), pp. 273-298, 1996

[33] Chui C. K. and Wang J. , "A General Framework of Compactly Supported Splines and Wavelets," *Journal of Approximation Theory*, 71 (3), pp. 263-304, 1992

[34] Chui C. K. , *An Introduction to Wavelets* (Wavelet Analysis and Its Applications, Vol. 1), Boston: Academic Press Inc. , 1992 (中译本:《小波分析导论》, 程正兴译, 西安交通大学出版社, 1995 年)

[35] Chui C. K. and Li C. , "Nonorthogonal Wavelet Packets," *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 24 (3), pp. 712-738, 1993

[36] Chui C. K. and Lian J. , "A Study of Orthonormal Multi-Wavelets," *Applied Numerical Mathematics*, 20 (3), pp. 273-298, 1996

[37] Cohen A. , Daubechies I. and Feauveau J. , "Biorthogonal Bases of Compacted Supported Wavelets," *Commun. Pure and Applied Mathematics*, 45 (5), pp. 485-560, 1992

[38] Cohen A. and Kovacevic J. , "Wavelets: The Mathematical Background," *Proceedings of the IEEE*, 84 (4), pp. 514-522, 1996

[39] Cohen A. , *Numerical Analysis of Wavelet Methods* (Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 32), Boston: Elsevier, 2003

[40] Coifman R. , "Adapted Multiresolution Analysis, Computation, Signal Processing and Operator Theory," *Proceedings of ICM '90*, International Congress of Mathematicians '90, Kyoto, Japan, Springer-Verlag, 1990

[41] Coifman R. R. and Wickerhauser M. V., "Entropy-Based Algorithms for Best Bases Selection," *IEEE Trans. Information Theory*, 38 (2), pp. 713-718, 1992

[42] Conway J. B., *A Course in Operator Theory* (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 21), Providence R. I.: American Mathematical Society, 1999

[43] Dahmen W., Prossdorf S. and Schneider R., "Wavelet approximation methods for pseudodifferential equations I: Stability and convergence," *Mathematische Zeitschrift*, 215, pp. 583-620, 1994

[44] Dahmen W., Prossdorf S. and Schneider R., "Wavelet approximation methods for pseudodifferential equations II: Matrix compression and fast solution," *Advances in Computational Mathematics*, 1 (3), pp. 259-335, 1993

[45] Dahmen W., "Wavelet Methods for PDEs—Some Recent Developments," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 128 (1), pp. 133-186, 2001

[46] D'Attellis C. E. and Fernandez-Berdaguer E. M. (Eds.), *Wavelet Theory and Harmonic Analysis in Applied Science* (Applied and Numerical Harmonic Analysis), Boston, MA: Birkhauser Verlag, 1997

[47] Daubechies I., "Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets," *Commun. Pure and Applied Mathematics*, 41 (7), pp. 909-996, 1988

[48] Daubechies I., "Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets II: Variations on a Theme," *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 24 (2), pp. 499-519, 1993

[49] Daubechies I., *Ten Lectures on Wavelets* (CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Vol. 61), Philadelphia, PA: SIAM, 1992 (中译本:《小波十讲》,李建平,杨万年译,北京:国防工业出版社,2004 年)

[50] Daubechies I. and Lagarias J. C., "Two-scale difference equations I: Existence and global regularity of solutions," *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 22 (5), pp. 1388-1410, 1991

[51] Daubechies I. and Lagarias J. C., "Two-scale difference equations II: Local regularity, infinite products of matrices and fractals," *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 23 (4), pp. 1031-1079, 1992

[52] Daubechies I. and Sweldens W., "Factoring Wavelet Transforms into Lifting Steps," *The Journal of Fourier Analysis and Applications*, 4 (3), pp. 247-269, 1998

[53] Debnath L. and Mikusinski P., *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*, Second Edition, San Diego: Academic Press, 1999

[54] DeVore R. A., Jawerth B. and Lucier B. J., "Image Compression through Wavelet Transform Coding," *IEEE Trans. Information Theory*, 38 (2), pp. 719-746, 1992

[55] DeVore R. A., Jawerth B. and Popov V., "Compression of Wavelet Decompositions," *American Journal of Mathematics*, 114 (4), pp. 737-785, 1992

[56] DeVore R. A., "Nonlinear Approximation," *Acta Numerica*, Cambridge University Press, Vol. 7, pp. 51-150, 1998

[57] Donoho D. L., "Denoising via Soft Thresholding," *IEEE Transactions on Information Theory*, 41 (3), pp. 613-627, 1995

[58] Donoho D. L., Vetterli M., DeVore R. A. and Daubechies I., "Data Compression and Harmonic Analysis," *IEEE Trans. Information Theory*, 44 (6), pp. 2435-2476, 1998

[59] Donovan G., Geronimo J. S., Hardin D. P. and Massopust P. R., "Construction of orthogonal wavelets using fractal interpolation functions," *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, Vol. 27, pp. 1158-1192, July 1996

[60] Fan Qibin, Li Hong, "An Overview on Wavelet Software Packages," *Wuhan University Journal of Natural Sciences*, 6(1-2) pp. 593-600, 2001

[61] Fan Qibin, Song X.-Y, "Local Extrema of Periodic Function's Wavelet Transform," *Wuhan University Journal of Natural Sciences*, 10(6) pp. 949-952, 2005

[62] Fan Qibin, Shi L.-J, "Two Perfect Reconstruction Algorithms for Boundary Processing in Wavelet Transform," *Technical Report*, School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Sep. 2005

[63] Fan Qibin, Wang S.-Y, "A Generalized Thresholding Model for Multiwavelet Denoising," *Technical Report*, School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, June 2006

[64] Fan Qibin, Jiang M.-K and Xiao W.-P, "Analysis of Wavelet Image Denoising Model in Besov Spaces," in *The 15th International Symposium on Multispectral Image Processing and Pattern Recognition*, Proceedings of SPIE, Vol. 6876, 2007

[65] Fan Qibin, Zhang Tao, "An Image Decomposition Model Using the Dual Method and H^{-1} Norm," *Proceedings of the 8th ISSAA (Spatial Accuracy 2008)*, Accuracy in Geomatics, Volume 2, World Academic Press, pp. 360-367, 2008

[66] Frazier M. and Jawerth B., "Decomposition of Besov Spaces," *Indiana Univ. Math. Journal*, 34 (4), pp. 777-799, 1985

[67] Garnett J. B., Le T. M., Meyer Y. and Vese L. A., "Image Decompositions Using Bounded Variation and Generalized Homogeneous Besov Spaces," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 23 (1), pp. 25-56, 2007

[68] Geronimo J. S., Hardin D. P. and Massopust P. R., "Fractal Functions and Wavelet Expansions Based on Several Scaling Functions," *Journal of Approximation Theory*, 78 (3), pp. 373-401, 1994

[69] Glowinski R., Lawton W., Ravachol M. and Tenenbaum E., "Wavelet Solution of

Linear and Nonlinear Elliptic, Parabolic and Hyperbolic Problems in One Dimension," *Proceedings of the 9th International Conference on Numerical Methods in Applied Sciences and Engineering*, R. Glowinski and A. Lichnewsky (Eds.), SIAM, Philadelphia, PA, pp. 55-120, 1990

[70] Goodman T. N. T., Lee S. L. and Tang W. S., "Wavelets in Wandering Subspaces," *Trans. American Mathematical Society*, 338 (2), pp. 639-654, 1993

[71] Goodman T. N. T. and Lee S. L., "Wavelets of Multiplicity r," *Transactions of the American Mathematical Society*, 342 (1), pp. 307-324, 1994

[72] Goswami J. C. and Chan A. K., *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications*, John Wiley & Sons, Inc., 1999

[73] Grochenig K. and Madych W. R., "Multiresolution Analysis, Haar Bases, and Self-Similar Tilings of R^n," *IEEE Trans. Information Theory*, 38 (2), pp. 556-568, 1992

[74] Grossmann A. and Morlet J., "Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape," *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 15 (4), pp. 723-736, 1984

[75] Grossmann A., Morlet J. and Paul T., "Transforms Associated to Square Integrable Group Representations," *Journal of Mathematical Physics*, 26 (10), pp. 2473-2479, 1985

[76] Hajji M. A., Melkonian S. and Vaillancourt R., "Representation of Differential Operators in Wavelet Bases," *Computers and Mathematics with Applications*, 47 (6-7), pp. 1011-1033, 2004

[77] Han B. and Jiang Q.-T., "Multiwavelets on the interval," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 12 (1), pp. 100-126, 2002

[78] Hardin D. P. and Marasovich J. A., "Biorthogonal Multiwavelets on [−1, 1]," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 7 (1), pp. 34-53, 1999

[79] Heil C. and Colella D., "Matrix refinement equations: Existence and uniqueness," *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2 (4), pp. 363-377, 1996

[80] Heil C. E. and Walnut D. F., "Continuous and Discrete Wavelet Transforms," *SIAM Review*, 31 (4), pp. 628-666, 1989

[81] Heil C. E., Jorgensen P. E. T. and Larson D. R. (Eds.), *Wavelets, Frames and Operator Theory*, American Mathematical Society, 2004

[82] Hess-Nielsen N. and Wickerhauser M. V., "Wavelets and Time-Frequency Analysis," *Proceedings of the IEEE*, 84 (4), pp. 523-540, 1996

[83] Hewitt E. and Ross K. A., *Abstract Harmonic Analysis*, Second Edition, Berlin: Springer Verlag, 1979

[84] Holschneider M., Tchamitchian Ph., "Pointwise Aanalysis of Riemann's 'nondif-

ferentiable' Function," *Inventiones Mathematicae*, 105 (1), pp. 157-175, 1991

[85] Jaffard S., "Wavelet Methods for Fast Resolution of Elliptic Problems," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 29 (4), pp. 965-986, 1992

[86] Jansen M., *Noise Reduction by Wavelet Thresholding*, Volume 161 of Lecture Notes in Statistics. Springer Verlag, 2001

[87] Jia R. Q. and Micchelli C. A., "On Linear Independence for Integer Translates of a Finite Number of Functions," *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 36 (1), pp. 69-85, 1993

[88] Jia R. Q., "Shift-Invariant Spaces and Linear Operator Equations," *Israel Journal of Mathematics*, Vol. 103, pp. 259-288, 1998

[89] Jia R. Q., "Stability of the Shifts of a Finite Number of Functions," *Journal of Approximation Theory*, 95 (2), pp. 194-202, 1998

[90] Jiang Q. T., "On the Regularity of Matrix Refinable Functions," *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 29 (5), pp. 1157-1176, 1998

[91] Keinert F. *Wavelets and Multiwavelets*, Volume 42 of Studies in Advanced Mathematics, Chapman & Hall, 2003

[92] Keinert F. and Kwon S.-G., "High Accuracy Reconstruction from Wavelet Coefficients," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 4 (3), pp. 293-316, 1997

[93] Kou W.-D., *Digital Image Compression: Algorithms and Standards*, Kluwer Academic Publishers, 1995

[94] Kunoth A., editor, *Wavelet Methods - Elliptic Boundary Value Problems and Control Problems*, Teubner Verlag, 2001

[95] Lage C. and Schwab C., "Wavelet Galerkin Algorithms for Boundary Integral Equations," *SIAM Journal on Scientific Computing*, 20 (6), pp. 2195-2222, 1999

[96] Lawton W. M., "Necessary and Sufficient Conditions for Constructing Orthonormal Wavelet Bases," *Journal of Mathematical Physics*, 32 (1), pp. 57-61, 1991

[97] Lebrun J. and Vetterli M., "Balanced Multiwavelets Theory and Design," *IEEE Trans. Signal Processing*, 46 (4), pp. 1119-1125, 1998

[98] Lewis A. S. and Knowles G., "Image Compression Using the 2-D Wavelet Transform," *IEEE Trans. Image Processing*, 1 (2), pp. 244-250, 1992

[99] Li Jin, "Image Compression: The Mathematics of JPEG 2000," *Modern Signal Processing*, Rockmore D. N. and Healy D. M. Jr. (Eds.), pp. 185-221, Volume 46 of MSRI, Cambridge: Cambridge University Press, 2004

[100] Lorenz D. A., "Variational Denoising in Besov Spaces and Interpolation of Hard and Soft Wavelet Shrinkage," *Preprint* 48, DFG 1114, March 2004

[101] Mallat S., "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation," *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11 (7), pp. 674-693, 1989

[102] Mallat S., "Multiresolution Approximations and Wavelet Orthonormal Bases of $L^2(\mathbf{R})$," *Trans. the American Mathematical Society*, 315 (1), pp. 69-87, 1989

[103] Mallat S., *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Second Edition, San Diego: Academic Press, 1999

[104] Marcellin M. W. and Bilgin A., "JPEG2000: Highly Scalable Image Compression," in *Proceedings of* 2001 *International Conference on Information Technology: Coding and Computing* (ITCC 2001), pp. 268-272, IEEE Computer Society Press. ITCC 2001, Las Vegas, Nevada, USA, April 2001

[105] Marcellin M. W., Gormish M., Bilgin A., and Boliek M. P., "An Overview of JPEG2000," in *Proceedings of the Data Compression Conference*, pp. 523-544, Snowbird, Utah, March 2000

[106] Maz'ya V. and Schmidt G., "Approximate Wavelets and the Approximation of Pseudodifferential Operators," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 6 (3), pp. 287-313, 1999

[107] Meyer Y., *Wavelets and Operators* (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 37), Translated from the French by D. H. Salinger, New York: Cambridge University Press, 1992 (中译本:《小波与算子(第一卷)》, 尤众译, 北京: 世界图书出版公司, 1992年)

[108] Meyer Y. and Coifman R. R., *Wavelets: Calderón-Zygmund and Multilinear Operators* (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 48), Translated from the French by D. H. Salinger, New York: Cambridge University Press, 1997 (中译本:《小波与算子(第二卷)》, 王耀东译, 北京: 世界图书出版公司, 1994年)

[109] Micchelli C. A., "Using the Refinement Equations for the Construction of Pre-Wavelets," *Numerical Algorithms*, Vol. 1, No. 1, pp. 75-116, 1991

[110] Micchelli C. A. and Xu Y.-S., "Using the Matrix Refinement Equation for the Construction of Wavelets on Invariant Sets," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1 (4), pp. 391-401, 1994

[111] Olson T. and DeStefano J., "Wavelet Localization of the Radon Transform," *IEEE Trans. Signal Processing*, 42 (8), pp. 2055-2067, 1994

[112] Plonka G. and Strela V., "Construction of Multiscaling Functions with Approximation and Symmetry," *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 29 (2), pp. 481-510, 1998

[113] Plonka G. and Strela V., "From Wavelets to Multiwavelets," *in Mathamatical*

Methods for Curves and Surfaces II, M. Dahlem, T. Lyche, and L. Schumaker (Eds.), Vanderbilt University Press, pp. 375-399, 1998

[114] Prasad L. and Iyengar S. S., *Wavelet Analysis with Applications to Image Processing*, Boca Raton, FL: CRC Press LLC, 1997

[115] Quak E. and Weyrich N., "Decomposition and Reconstruction Algorithms for Spline Wavelets on a Bounded Interval," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1 (3), pp. 217-231, 1994

[116] Ramchandran K. and Vetterli M., "Best Wavelet Packet Bases in a Rate-Distortion Sense," *IEEE Trans. Image Processing*, 2 (2), pp. 160-175, 1993

[117] Ramchandran K., Vetterli M. and Herley C., "Wavelets, Subband Coding, and Best Bases," *Proceedings of the IEEE*, 84 (4), pp. 541-560, 1996

[118] Ran X. and Farvardin N., "A Perceptually Motivated Three-Component Image Model - Part Ⅰ: Description of the Model," *IEEE Trans. Image Processing*, 4 (4), pp. 401-415, 1995

[119] Ran X. and Farvardin N., "A Perceptually Motivated Three-Component Image Model— Part Ⅱ: Applications to Image Compression," *IEEE Trans. Image Processing*, 4 (4), pp. 430-447, 1995

[120] Rashid-Farrokhi, F., Liu K. J. R., Berenstein C. A., and Walnut D., "Wavelet-Based Multiresolution Local Tomography," *IEEE Trans. Image Processing*, 6 (10), pp. 1412-1430, 1997

[121] Resnikoff H. L. and Wells R. O., *Wavelet Analysis*, New York: Springer Verlag, 1998

[122] Rioul O. and Vetterli M., "Wavelets and Signal Processing," *IEEE Signal Processing Magazine*, 8 (4), pp. 14-38, 1991

[123] Rioul O., "Simple Regularity Criteria for Subdivision Schemes," *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 23 (6), pp. 1544-1576, 1992

[124] Rioul O. and Duhamel P., "Algorithms for Discrete and Continuous Wavelet Transforms," *IEEE Trans. Information Theory*, 38 (2), pp. 569-586, 1992

[125] Robertsson J. O. A., Blanch J. O., Symes W. W. and Burrus C. S., "Galerkin-Wavelet Modeling of Wave Propagation: Optimal Finite-Difference Stencil Design," *Mathematical and Computer Modelling*, 19 (1), pp. 31-38, 1994

[126] Said A. and Pearlman W. A., "A New, Fast and Efficient Image Codec Based on Set Partitioning in Hierarchical Trees," *IEEE Trans. Circuits and Systems for Video Technology*, 6 (3), pp. 243-250, 1996

[127] Said A. and Pearlman W. A., "An Image Multiresolution Representation for Lossless and Lossy Compression," *IEEE Trans. Image Processing*, 5 (9), pp. 1303-1310, 1996

[128] Schroder P., "Wavelets in Computer Graphics," *Proceedings of the IEEE*, 84 (4), pp. 615-625, 1996

[129] Selesnick I. W., Baraniuk R. G. and Kingsbury N. G., "The Dual-tree Complex Wavelet Transform—A Coherent Framework for Multiscale Signal and Image Processing," *IEEE Signal Processing Magazine*, 22 (6), pp. 123-151, 2005

[130] Shapiro J. M., "Embedded Image Coding Using Zerotrees of Wavelet Coefficients," *IEEE Trans. Signal Processing*, 41 (12), pp. 3445-3462, 1993

[131] Shen Lixin, Tan H. H. and Tham J. Y., "Symmetric-Antisymmetric Orthonormal Multiwavelets and Related Scalar Wavelets," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 8 (3), pp. 258-279, 2000

[132] Shensa M. J., "The Discrete Wavelet Transform: Wedding the a Trous and Mallat Algorithms," *IEEE Trans. Signal Processing*, 40 (10), pp. 2464-2482, 1992

[133] Sherlock B. G. and Monro D. M., "On the Space of Orthonormal Wavelets," *IEEE Trans. Signal Processing*, 46 (6), pp. 1716-1720, 1998

[134] Shubin M. A., *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*, Second Edition, Springer Series in Soviet Mathematics, Translated from the Russian by S. I. Andersson, Berlin: Springer Verlag, 2001

[135] Sowa A., "High Accuracy Multiwavelets with Short Supports," *IEEE Trans. Signal Processing*, 46 (12), pp. 3420-3422, 1998

[136] Steffen P., Heller P. N., Gopinath R. A. and Burrus C. S., "Theory of Regular M-Band Wavelet Bases," *IEEE Trans. Signal Processing*, 41 (12), pp. 3497-3511, 1993

[137] Stein E. M. and Weiss G., *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton: Princeton University Press, 1971

[138] Steven G. Krantz, *A Panorama of Harmonic Analysis* (The Carus Mathematical Monographs, Vol. 27), Washington DC: The Mathematical Association of America, 1999

[139] Strang G., "Wavelets and Dilation Equations: A Brief Introduction," *SIAM Review*, 31 (4), pp. 614-627, 1989

[140] Strang G., "Wavelet Transforms versus Fourier Transforms," *Bulletin of the American Mathematical Society*, 28 (2), pp. 288-305, 1993

[141] Strela V., *Multiwavelets: Theory and Applications*, Ph. D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 1996

[142] Strela V., "Multiwavelets: Regularity, Orthogonality and Symmetry via Two-scale Similarity Transform," *Studies in Applied Mathematics*, 98 (4) pp. 335-354, 1997

[143] Strela V. and Walden A. T., "Signal and Image Denoising via Wavelet Threshol-

ding: Orthogonal and Biorthogonal, Scalar and Multiple Wavelet Transforms," in *Nonlinear and Nonstationary Signal Processing*, Fitzgerald W. F., Smith R. L., Walden A. T., and Young P. C. (Eds), Cambridge University Press, pp. 395-441, 2001

[144] Sun W. and Zhou X., "Sampling Theorem for Wavelet Subspaces: Error Estimate and Irregular Sampling," *IEEE Trans. Signal Processing*, 48 (1), pp. 223-226, 2000

[145] Sweldens W., "The Lifting Scheme: A New Philosophy in Biorthogonal Wavelet Constructions," in *Wavelet Applications in Signal and Image Processing* Ⅲ, Proc. of SPIE, Vol. 2569, pp. 68-79, 1995

[146] Sweldens W., "The Lifting Scheme: A Construction of Second Generation Wavelets," *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 29 (2), pp. 511-546, 1998

[147] Tan H. H., Shen Li-Xin and Tham J. Y., "New Biorthogonal Multiwavelets for Image Compression," *Signal Processing*, 79 (1), pp. 45-65, 1999

[148] Taswell C., *Algorithms for Wavelet Transforms and Adaptive Wavelet Packet Decomposition*, Ph. D. thesis, Stanford University, California, 1995

[149] Taubman D., "High Performance Scalable Image Compression with EBCOT," *IEEE Trans. Image Processing*, 9 (7), pp. 1158-1170, 2000

[150] Taylor M. E., *Pseudodifferential Operators*, Princeton N. J.: Princeton University Press, 1981

[151] Tham J. Y., Shen L., Lee S. L. and Tan H. H., "A General Approach for Analysis and Application of Discrete Multiwavelet Transforms," *IEEE Trans. Signal Processing*, 48 (2), pp. 457-464, 2000

[152] Tian J. and Wells R. O. Jr., "An Algebraic Structure of Orthogonal Wavelet Space," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 8 (3), pp. 223-248, 2000

[153] Triebel H., *Theory of Function Spaces* Ⅱ, Monographs in Mathematics, Vol. 84, Basel: Birkhauser Verlag, 1992

[154] Unser M., "On the Optimality of Ideal Filters for Pyramid and Wavelet Signal Approximation," *IEEE Trans. Signal Processing*, 41 (12), pp. 3591-3596, 1993

[155] Unser M., "Sampling - 50 Years after Shannon," *Proceedings of the IEEE*, 88 (4), pp. 569-587, 2000

[156] Unser M. and Blu T., "Mathematical Properties of the JPEG2000 Wavelet Filters," *IEEE Trans. Image Processing*, 12 (9), pp. 1080-1090, 2003

[157] Vese L. A. and Osher S. J., "Modeling Textures with Total Variation Minimization and Oscillating Patterns in Image Processing," *Journal of Scientific Computing*, 19 (1-3), pp. 553-572, 2003

[158] Vetterli M., "Wavelets, Approximation, and Compression," *IEEE Signal Processing Magazine*, 18 (5), pp. 59-73, 2001

[159] Vrhel M. J., Lee C. and Unser M., "Rapid Computation of the Continuous Wavelet Transform by Oblique Projections," *IEEE Trans. Signal Processing*, 45 (4), pp. 891-900, 1997

[160] Walker P. L., *The Theory of Fourier Series and Integrals*, New York: John Wiley & Sons, 1986

[161] Walnut D. F., *An Introduction to Wavelet Analysis* (Applied and Numerical Harmonic Analysis), Boston MA: Birkhauser Verlag, 2002

[162] Walter G. G., "A Sampling Theorem for Wavelet Subspaces," *IEEE Trans. Information Theory*, 38 (2), pp. 881-884, 1992

[163] Walter G. G. and Shen X., *Wavelets and Other Orthogonal Systems with Applications*, Second Edition, Boca Raton, FL: CRC Press, Inc., 2000

[164] Wang Y.-P., "Image Representations Using Multiscale Differential Operators," *IEEE Trans. Image Processing*, 8 (12), pp. 1757-1771, 1999

[165] Welland G. V. (Ed.), *Beyond Wavelets* (Studies in Computational Mathematics, Vol. 10), Amsterdam: Academic Press, 2003

[166] Wells Jr. R. O., "Parametrizing Smooth Compactly Supported Wavelets," *Trans. of the American Mathematical Society*, 338 (2), pp. 919-931, 1993

[167] Wickerhauser M. V., *Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software*, Boston: A. K. Peters, Ltd., 1994

[168] Wojtaszczyk P., "Projections and Nonlinear Approximation in the Space BV($\mathbf{R}^d$)," *Proceedings of the London Mathematical Society* (3), 87 (2), pp. 471-497, 2003

[169] Xia X.-G., Geronimo J. S., Hardin D. P. and Suter B. W., "Design of Prefilters for Discrete Multiwavelet Transforms" *IEEE Trans. Signal Processing*, 44 (1), pp. 25-35, 1996

[170] Yosida K., *Functional Analysis*, Sixth Edition, Berlin: Springer Verlag, 1981, Reprinted by Beijing, 1993

[171] Young R. M., *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, New York: Academic Press, 1980

[172] Zandi A., Allen J. D., Schwartz E. L. and Boliek M., "CREW: Compression with Reversible Embedded Wavelets," *Proceedings of IEEE Data Compression Conference*, pp. 212-221, Snowbird, Utah, March 1995

[173] Zarowski C. J., "Notes on Orthogonal Wavelets and Wavelet Packets," *Technical Report*, Department of Electrical and Computer Engineering, Queen's University, Kingston, Ontario, Canada, K7L 3N6, Nov. 1995

[174] Zhang X. P., Tian L. S. and Peng Y. N., "From the Wavelet Series to the Discrete Wavelet Transform - the Initialization," *IEEE Trans. Signal Processing*, 44 (1), pp. 129-133, 1996

[175] Zhao S.-Y, Welland G. and Wang G., "Wavelet Sampling and Localization Schemes for the Radon Transform in Two Dimensions," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 57 (6), pp. 1749-1762, 1997

[176] Zhao W. and Rao R. M., "Wavelet Transforms with Discrete-Time Continuous-Dilation Wavelets," in *Wavelet Applications* VI, Proc. of SPIE, Vol. 3723, pp. 401-406, Orlando, FL, USA, 1999

[177] Zhou D. X., editor, *Wavelet Analysis: Twenty Years' Developments*, Volume 1 of Series in Analysis, World Scientific Publishing Company, 2002

[178] 蔡超，徐长发，带有小波函数积分的外推加速算法，应用数学，12 (3)，pp. 21-25，1999

[179] 谌秋辉，彭思龙，刘今朝，二元小波矩阵扩充的逆问题，数学学报，43 (4)，pp. 733-742，2000

[180] 陈翰麟，李登峰，多维周期双正交向量小波的构造，数学年刊(A 辑)，21 (4)，pp. 449-456，2000

[181] 陈基明，小波分析基础，上海：上海大学出版社，2002

[182] 陈恕行，拟微分算子(第 2 版)，北京：高等教育出版社，2006

[183] 陈文胜，有限区间上标准正交周期样条小波基的构造，中山大学学报(自然科学版)，37 (3)，pp. 32-36，1998

[184] 陈武凡，小波分析及其在图像处理中的应用，北京：科学出版社，2002

[185] 程正兴，杨守志，冯晓霞，小波分析的理论、算法、进展和应用，北京：国防工业出版社，2007

[186] 成礼智，王红霞，罗永，小波的理论与应用，北京：科学出版社，2004

[187] 邓东皋，彭立中，小波分析，数学进展，20 (3)，pp. 294-310，1991

[188] 高协平，周四望，正交平衡对称的区间多小波研究，中国科学 E 辑，35 (4)，pp. 385-404，2005

[189] 耿则勋，小波变换边界处理的一般方法，工程数学学报，14 (4)，pp. 39-43，1997

[190] 韩长安，樊启斌，基于矩形域上双正交小波的图像分区压缩，数学杂志，26 (3)，pp. 305-308，2006

[191] [日]河田龍夫，FOURIER 分析，周民强译，北京：高等教育出版社，1984

[192] 何正嘉，陈雪峰，李兵，向家伟，小波有限元理论及其工程应用，北京：科学出版社，2006

[193] 黄达人，孙颀彧，王伟，多个尺度函数产生的多分辨率分析(英文)，数学进展，26 (2)，pp. 165-180，1997

[194] 焦李成，侯彪，王爽，刘芳，图像多尺度几何分析理论与应用，西安：西安电子科

技大学出版社，2008

[195] 梅树立，张森文，陆启韶，基于同伦技术的 Burgers 方程的小波精细积分算法，计算物理，24 (1)，pp. 54-58，2007

[196] 李敏，冯象初，基于小波空间的图像分解变分模型，电子学报，36 (1)，pp. 184-187，2008

[197] 李松，冼军，由向量细分方程生成的双正交多重小波，中国科学 A 辑：数学，37 (5)，pp. 549-558，2007

[198] 李世雄，小波变换及其应用，北京：高等教育出版社，1997

[199] 梁学章，何甲兴，王新民，李强，小波分析，北京：国防工业出版社，2005

[200] 龙瑞麟，高维小波分析，北京：世界图书出版公司，1995

[201] 陆金甫，关治，偏微分方程数值解法(第 2 版)，北京：清华大学出版社，2004

[202] 吕东辉，庄天戈，基于 Bessel 函数的小波基的构造与性质，上海交通大学学报，32 (1)，pp. 41-45，1998

[203] 孟鸿鹰，刘贵忠，王志华，正交小波(包)变换的算子矩阵，电子学报，29 (5)，pp. 675-677，2001

[204] 潘泉，张磊，孟晋丽，张洪才，小波滤波方法及应用，北京：清华大学出版社，2005

[205] 潘文杰，傅里叶分析及其应用，北京：北京大学出版社，2000

[206] 彭思龙，二元可分正交紧支集小波基的刻划，数学学报，43 (1)，pp. 189-192，2000

[207] 彭思龙，李登峰，谌秋辉，周期小波理论及其应用，北京：科学出版社，2003

[208] 孙即祥，图像压缩与投影重建，北京：科学出版社，2005

[209] 孙延奎，小波分析及其应用，北京：机械工业出版社，2005

[210] 唐向宏，李齐良，时频分析与小波变换，北京：科学出版社，2008

[211] 唐远炎，王玲，小波分析与文本文字识别，北京：科学出版社，2004

[212] 王玲，多小波理论及其在图像处理中的应用研究，博士学位论文，西安：西安电子科技大学，2000

[213] 王大凯，彭进业，小波分析及其在信号处理中的应用，北京：电子工业出版社，2006

[214] 王国秋，郑果，具有对称或反对称滤波器组的正交平衡多小波，华中科技大学学报(自然科学版)，35 (2)，pp. 61-63，2007

[215] 王帅灵，樊启斌，矩阵值小波包的分解与重构算法，武汉大学学报(理学版)，51 (S2)，pp. 15-18，2006

[216] 王帅灵，樊启斌，α 尺度下正交小波包的 Mallat 算法，数学杂志，27 (6)，pp. 664-668，2007

[217] 吴勃英，邓中兴，热传导方程的小波解法，应用数学学报，24 (1)，pp. 10-16，2001

[218] 肖敏，朱秀阁，文成林，小波变换与矩心，纯粹数学与应用数学，15 (2)，pp. 52-53，1999

[219] 夏勇，田捷，戴汝为，静止图像的小波压缩研究进展，模式识别与人工智能，12 (1)，pp. 45-55，1999

[220] 徐晨，赵瑞珍，甘小冰，小波分析·应用算法，北京：科学出版社，2004

[221] 杨守志，紧支撑正交插值的多小波和多尺度函数，数学学报，48 (3)，pp. 565-672，2005

[222] 杨守志，杨晓忠，紧支撑正交对称和反对称小波的构造，计算数学，22 (3)，pp. 333-338，2000

[223] 姚庆栋，毕厚杰，王兆华，徐孟侠，图象编码基础，杭州：浙江大学出版社，1993

[224] 张贤达，保铮，非平稳信号分析与处理，北京：国防工业出版社，1998

[225] 张春田，苏育挺，张静，数字图像压缩编码，北京：清华大学出版社，2006

[226] 张恭庆，林源渠，泛函分析讲义(上册)，北京：北京大学出版社，1987

[227] 周先波，提升格式和双正交小波 Riesz 基，中山大学学报(自然科学版)，37 (4)，pp. 38-42，1998

名词索引

E

F

G

M

N

P

Q

R

[General Information]
书名=小波分析
作者=樊启斌著
页数=382
SS号=12126246
DX号=
出版日期=2008.10
出版社=武汉大学出版社